

Corso GEOMETRIA 2, a.a. 2023-2024

Informazioni sul corso:

- Lezioni: G. Pezzini, LUN - VEN ^{3 ore!} oppure GIO - VEN
- Esercitazioni: Francesco Meazzini

• Ogni mercoledì: foglio di esercizi pubblicato sul sito, soluzioni in aula la settimana successiva (e poi pubblicate online)

• Esami: esoneri, scritto e orale

• Diario delle lezioni: giornaliero, sul sito del corso

• Corsi aa.a.a. precedenti:

www.mat.uniroma1.it/people/pezzini/teaching.html

(attenzione: il corso del 2022-2023 è simile, ma non identico!)

• Ricevimento studenti: da stabilire

• Prerequisiti: 1) familiarità con funzioni continue (parte 1 del corso)

2) un po' di teoria dei gruppi (parte 2)

3) derivate di appl. $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (parte 3)

Qualche notazione che useremo: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Inclusione: $A \subseteq B$
inclusione propria:

$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$, e analogam. $\mathbb{Z}_{> 0}$, $\mathbb{R}_{> 0}$, $\mathbb{C}_{\neq 0}$, ecc...! $A \subsetneq B$

Il corso è diviso in 3 parti:

- 1) Topologia generale
- 2) Topologia algebrica (gruppo fondamentale e rivestimenti)
- 3) Geometria differenziale di curve e superfici in \mathbb{R}^3 .

TOPOLOGIA GENERALE

Introduzione

Nasce per studiare figure (= sottoinsiemi) in \mathbb{R}^n e applicazioni continue fra esse.

Nel corso :-

- 1) studieremo proprietà anche "intuitive" che si applicano naturalmente a figure in \mathbb{R}^n , es. compattezza, connessione = esser fatta di un solo "pezzo", ecc...
- 2) applicheremo le stesse proprietà a insiemi dotati in qualche modo di una "geometria" molto più strana e meno familiare.

Esempi di 2): si applica la topologia generale in

- analisi (es. insiemi di funzioni)
- algebra (es. insiemi di ideali di un anello)
- logica.

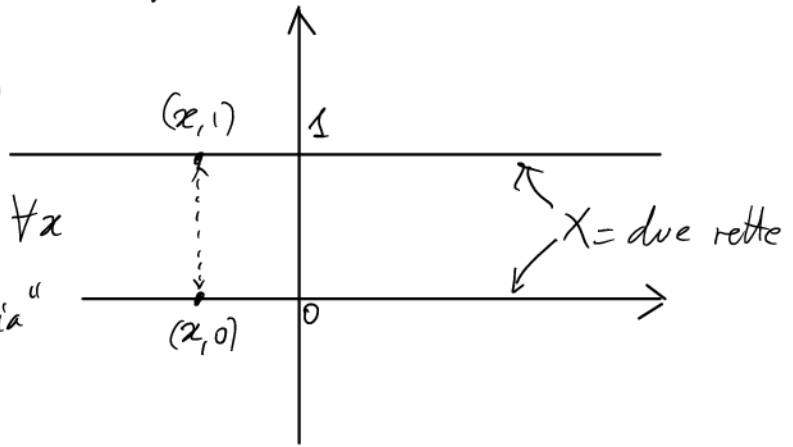
Esempio (informale di oggetti con geometria "strana"): in \mathbb{R}^2 prendiamo

$$X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$$

Poniamo $(x, 0) \sim (x, 1) \forall x$

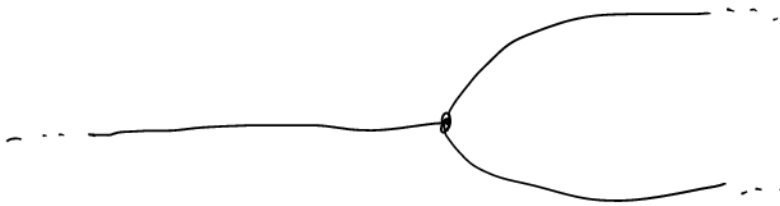
allora X/\sim "assomiglia"

a \mathbb{R} .

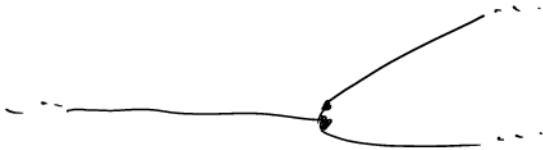


Se poniamo $(x, 0) \sim (x, 1) \forall x \leq 0$, allora X/\sim assomiglia

a



Se $(x, 0) \sim (x, 1) \forall x < 0$, X/\sim è più strano!



Dati $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow Y$, si definisce f continua

con la solita def.: $\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ se $x \in X$ soddisfa

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ allora}$$

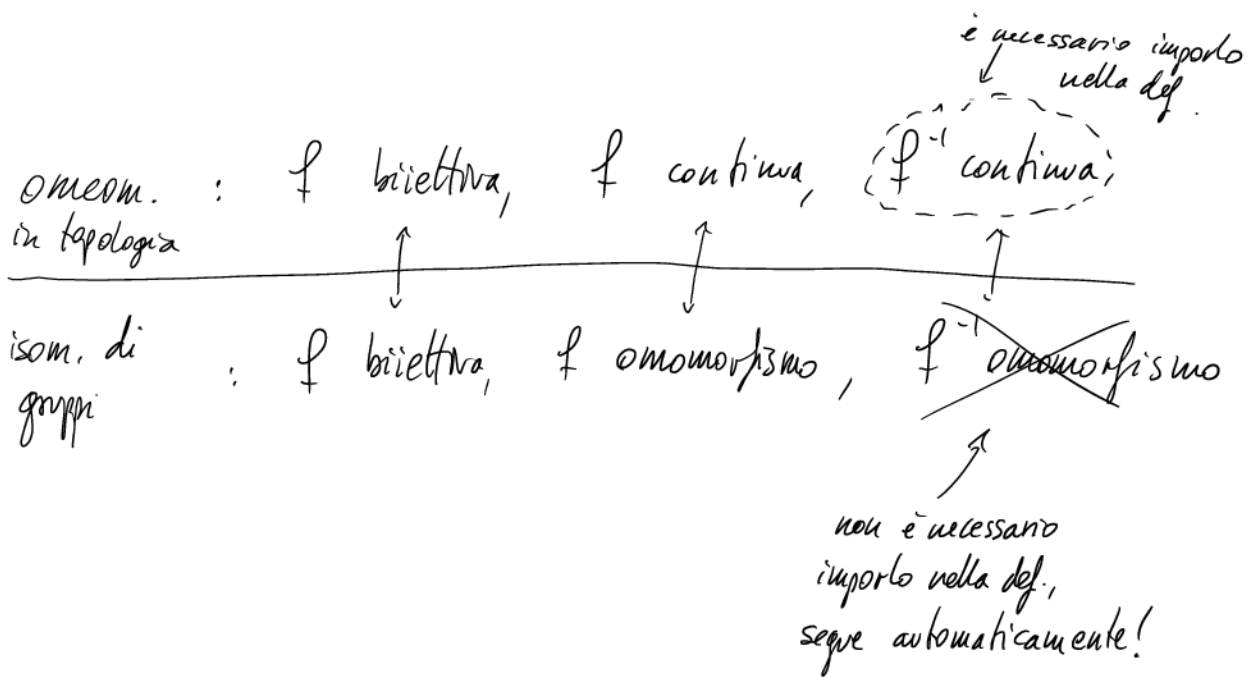
$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

anche se X e Y sono sottoinsiemi qualsiasi.

Def.: Una tale f si dice omeomorfismo se f è biettiva,

continua, e $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è continua.

Oss.: Gli omeomorfismi di top. hanno lo stesso ruolo degli isom. di teoria dei gruppi (o anelli). Però attenzione:



Esempi: 1) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ è omeomorfo a $[a, b] \forall a < b$

omeomorfismo $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$
 $t \mapsto tb + (1-t)a$

2) $S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2 + y^2}{\|(x, y)\|^2} = 1 \right\}$ è omeomorfo al
 quadrato $Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1 \right\}$

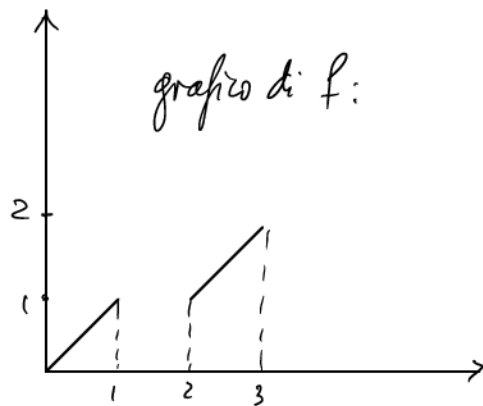
tramite $Q \xrightarrow{f} S^1$, $f^{-1}(x, y) = \frac{1}{\max\{|x|, |y|\}} \cdot (x, y)$
 $q \mapsto \frac{1}{\|q\|} \cdot q$

f e f^{-1} sono biettive e continue

$$3) f: [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

f è continua e biettiva, ma f^{-1} non è continua



Questa f non è un omeomorfismo.

4) $]0,1[$ è omeomorfo a $]0,+\infty[$ ad es.

tramite $f:]0,+\infty[\longrightarrow]0,1[$

$$x \longmapsto e^{-x}$$

5) $]0,+\infty[$ è omeomorfo a \mathbb{R} , ad es.

tramite $x \longmapsto \log(x)$

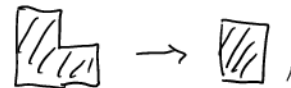
6) $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1]$ (dim.: più avanti)

è più difficile dimostrarlo rispetto agli es. precedenti, perché va dimostrato che non esiste alcun omeomorfismo $]0,1[\rightarrow [0,1]$!

Sfera n -dimensionale:

7) $S^n = \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \}$. Vale: $S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n tramite la proiezione stereografica (esercizio: vedere la def.)

8) Succede spesso di avere s.c. omeomorfismi di \mathbb{R}^n , in cui però è noioso o noiosissimo scrivere un omeom. esplicito. Ad es.



m -agone regolare \rightarrow l -agone regolare

($\forall m, l \geq 3$)

Nel corso vedremo delle scorciatoie per dim. che figure sono omeomorfe senza fare troppi conti.

9) Teorema (invarianza del dominio): dati $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

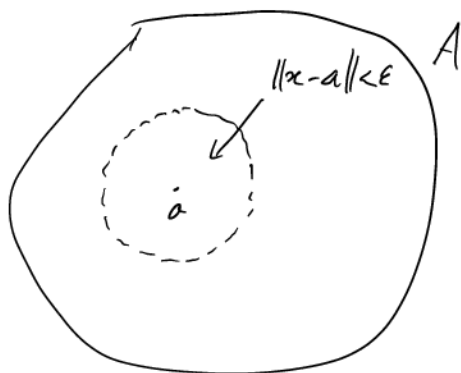
$$\mathbb{R}^n \text{ è omeom. a } \mathbb{R}^m \iff n = m$$

(senza dim., è difficile! Nel corso vedremo il teorema solo nei casi particolari $n=1$ e $n=2$.)

Vediamo altre considerazioni sulla def. di applicazione continua.

Ricordiamo la def.:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se $\forall a \in A \exists \varepsilon > 0$ (se $x \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\|x-a\| < \varepsilon$ allora $x \in A$)



Esercizio: Dim. che la palla aperta $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < r\}$

con $p \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, è un aperto di \mathbb{R}^n . Suggestione: usare la disuguaglianza triangolare.

Def.: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi, e sia $p \in \mathbb{R}^n$.

p si dice aderente a X se $\forall \epsilon > 0 \exists x \in X \mid \|x - p\| < \epsilon$

2) $C \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice chiuso se $\forall p$ aderente a C vale $p \in C$.

Esempio: $1 \in \mathbb{R}$ è aderente a $[0, 1[$

Esercizio: Dim. che $A \subseteq \mathbb{R}^m$ è aperto $\Leftrightarrow \mathbb{R}^m \setminus A = C$ è chiuso.

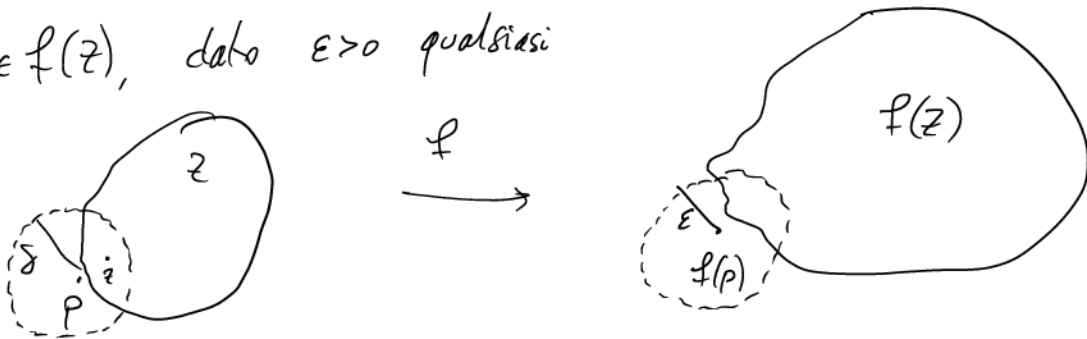
Proposizione: Sia $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sono equivalenti:

1) f è continua

2) $\forall Z \subseteq \mathbb{R}^m, \forall p \in \mathbb{R}^m$: se p è aderente a Z
allora $f(p)$ è aderente a $f(Z)$

3) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto: $f^{-1}(A) (\subseteq \mathbb{R}^m)$ è aperto.

Dim.: 1) \Rightarrow 2) | Supp. f continua, siano p, Z come in 2) con p aderente a Z , dim. che $f(p)$ è aderente a $f(Z)$. Sia $q \in f(Z)$, dato $\epsilon > 0$ qualsiasi



prendiamo $\delta > 0$ della def. di continuità in p . Sappiamo che p è aderente a Z , quindi esiste $z \in Z$ con $\|p - z\| < \delta$.
Per continuità: $\|f(z) - f(p)\| < \epsilon$, e ovviam. $f(z) \in f(Z)$.

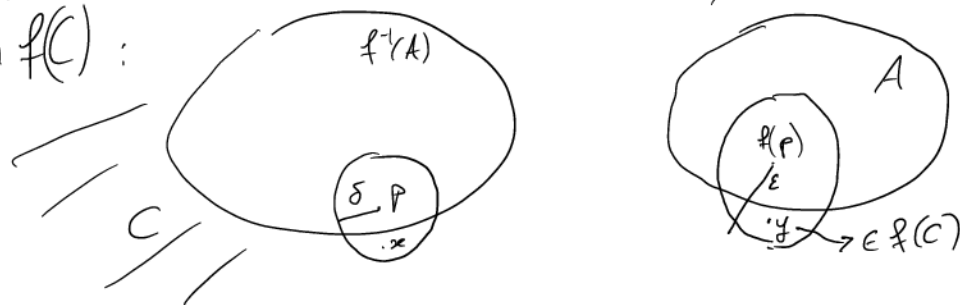
Quindi $f(p)$ è aderente a $f(Z)$.

2) \Rightarrow 3) | Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, dim. che $f^{-1}(A)$ è aperto.

Per assurdo, supponiamo $\exists p \in f^{-1}(A) \mid \forall \delta > 0 \exists x \in B_\delta(p) \mid x \notin f^{-1}(A)$.

Allora p è aderente al complementare $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A) = C$,

per 2) sappiamo che $f(p)$ è aderente a $f(C)$, cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(f(p)) \cap f(C)$:

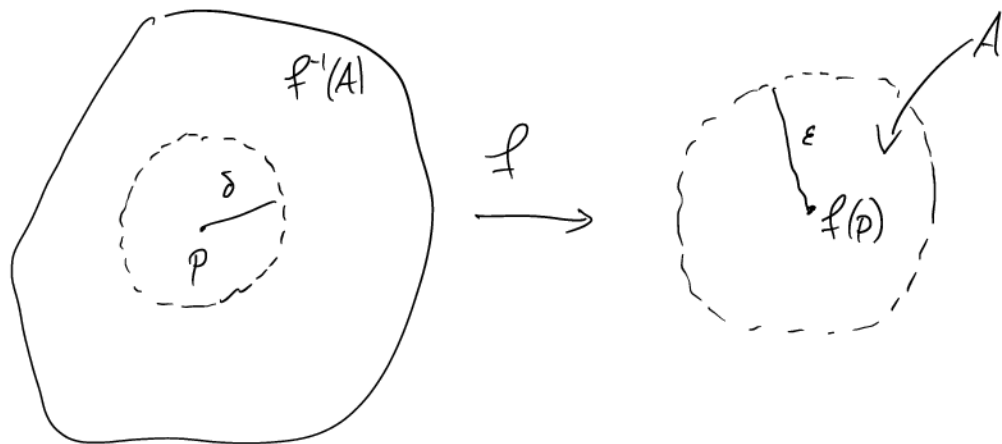


Un tale y non è in A , perché i punti di C sono proprio quelli non mandati in A . Ma A è aperto, e ε è abb. piccolo allora $B_\varepsilon(f(p))$ è tutta contenuta in A : assurdo.

3) \Rightarrow 1) Supponiamo 3) e verifichiamo la continuità di f in $p \in \mathbb{R}^n$.

Dato $\varepsilon > 0$ consid. $A = B_\varepsilon(f(p)) \subseteq \mathbb{R}^n$: è un aperto.

Allora $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e contiene p (perché $f(p) \in B_\varepsilon(f(p))$):



quindi $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(A)$, cioè ogni $x \in \mathbb{R}^n$ a

distanza $< \delta$ è in $f^{-1}(A)$, cioè è tale che $f(x) \in A$, cioè $f(x)$ è a distanza $< \epsilon$ da $f(p)$. Segue: f continua in p , $\forall p \in \mathbb{R}^n$. \square

La condizione 2) può essere presa come def. equivalente di continuità (almeno per applicaz. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). Vantaggi rispetto alla def. usuale di continuità:

- 2) è data senza riferirsi ai numeri reali ϵ, δ

Anche la condiz. 3) può essere presa come def. di continuità.

Qui i vantaggi sono:

- anche 3) è data senza riferirsi ai numeri reali ϵ, δ ;
- in più, 3) è data senza far alcun riferimento a singoli pt.

In effetti, 3) è la definizione che ispira tutta la topologia generale moderna, concentrandosi solo sulla famiglia di sottoinsiemi

$$\{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ aperto} \}$$

di \mathbb{R}^n . Questo dà origine alla def. di spazio topologico.

Spazi topologici e basi:

Definizione: Sia X un insieme, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (= insieme delle parti di X).

\mathcal{T} si dice una topologia se:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$

2) l'unione di una famiglia qualsiasi^(*) di elem. di \mathcal{T} è un elem. di \mathcal{T}

3) l'intersez. di due elem. qualsiasi di \mathcal{T} è un elem. di \mathcal{T} .

(*) qualsiasi = finita, infinita, anche vuota (l'unione di una famiglia vuota di insiemi è \emptyset per def.)

Se \mathcal{T} è una topologia, gli elem. di \mathcal{T} si dicono aperti (di \mathcal{T}), e (X, \mathcal{T}) o semplicem. X si dice uno spazio topologico.

Oss.: 3) è equivalente alla condizione

3') l'intersezione di una famiglia finita di elem. di \mathcal{T} è un elem. di \mathcal{T} .

Infatti: 3') \Rightarrow 3) è ovvio

3) \Rightarrow 3') per induzione, cioè dati $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{T}$ allora

$$A_1 \cap \dots \cap A_m = \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})}_{\substack{\in \mathcal{T} \text{ per} \\ \text{induz.}}} \cap A_m \in \mathcal{T} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{per 3)} \end{array}$$

Attenzione alla terminologia! D'ora in poi:

intervallo aperto = $]a, b[$ come al solito ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
 $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

aperto = elemento della topologia che stiamo considerando

Gli aperti "usuali" di \mathbb{R}^n saranno aperti per una certa topologia chiamata euclidea.

Esempi: 1) Ogni insieme X ammette almeno le seguenti topologie:

$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X \}$ topologia banale (o indiscreta)

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ topologia discreta

2) $X = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{T} = \{$ sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n come nella def. usuale ricordata nell'introduzione $\}$

Si verifica facilmente che \mathcal{T} soddisfa 1), 2), 3).

Questa topologia si dice euclidea (la rivedremo meglio più avanti). 11

Su \mathbb{R} , questa \mathcal{T} si può anche descrivere così: $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A$ è unione di intervalli aperti.

Verifica degli assiomi: 1) $\emptyset =$ unione (vuota) di int. aperti

$$X = \mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

2) ovvio

3) Dati $A = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$

$$B = \bigcup_{j \in J}]c_j, d_j[$$

allora $A \cap B = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}}]a_i, b_i[\cap]c_j, d_j[$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{opp.} \\]\max\{a_i, c_j\}, \min\{b_i, d_j\}[\end{cases}$$

quindi $A \cap B \in \mathcal{T}$.

3) Sia X un insieme, $p \in X$. Definiamo una topologia su X :

$$\mathcal{T} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ è vuoto, oppure } A \ni p \}$$

Cioè in \mathcal{T} vale: A è aperto se e solo se A è vuoto oppure contiene p .

Gli assiomi 1), 2), 3) si verificano subito, ad es. per 3)

prendiamo $A, B \in \mathcal{T}$; se A opp. B è vuoto allora

$A \cap B = \emptyset$ e vale $A \cap B \in \mathcal{T}$, se invece A e B sono

entrambi non noti allora entrambi contengono p , quindi anche $A \cap B$, da cui $A \cap B \in \mathcal{T}$.

4) Sia X un insieme qualsiasi, e poniamo

$$\mathcal{T} = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus A \text{ è un insieme finito} \}$$

\mathcal{T} è una topologia (verifica sarà negli esercizi), è detta topologia cofinita.

Def.: Sia (X, \mathcal{T}) sp. topologico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

Oss.: 1) Proprietà dei chiusi:

1) X, \emptyset sono chiusi

2) L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso

3) L'unione di due chiusi è un chiuso

(Seguono facilmente da $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$)

$$X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$$

che valgono per ogni sottoinsieme di X .)

2) In un qualsiasi sp. top. X , ci possono essere sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi. Ad es. \emptyset e X lo sono sicuramente! Se ad es. X ha topologia discreta, allora ogni sottoinsieme è aperto e chiuso.

Def.: Sia X sp. topologico con topologia \mathcal{T} .

Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. La famiglia \mathcal{B} si dice base di \mathcal{T} se ogni aperto si può scrivere come unione di elem. di \mathcal{B} .

(qui unione = unione qualsiasi, anche vuota)

Esempi: 1) \mathcal{T} è sempre una base per \mathcal{T} .

2) Se \mathcal{T} è la topologia discreta su un insieme X , allora $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ è una base di \mathcal{T} .

3) $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$ è una base della top. euclidea su \mathbb{R} .

Osservazione: Se \mathcal{B} è una base di \mathcal{T} , allora \mathcal{B} determina univocam. \mathcal{T} , perché $\mathcal{T} = \{ \text{unioni (arbitrarie) di elem. di } \mathcal{B} \}$

Proposizione: Sia X un insieme, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi. Esiste una topologia \mathcal{T} su X di cui \mathcal{B} è base se e solo se sono soddisfatte:

1) X è unione di elem. di \mathcal{B}

2) per ogni $A, A' \in \mathcal{B}$ l'intersezione $A \cap A'$ è unione di elem. di \mathcal{B}

(equivalentemente: $\forall A, A' \in \mathcal{B} \quad \forall p \in A \cap A' \quad \exists D \in \mathcal{B} \mid$
 $p \in D \subseteq A \cap A'$)

Oss.: Attenzione: se è già data una topologia \mathcal{T} , questa Proposizione non
si può usare per determinare se \mathcal{B} è una base di \mathcal{T} ! (È un
errore comune negli esami scritti...)

Dim.: \Rightarrow | Supp. esista \mathcal{T} , dim. 1) e 2).

1) X è aperto, quindi unione di elem. della base (ok)

2) Dati $A, A' \in \mathcal{B}$, essi sono aperti, e anche
 $A \cap A'$, che quindi si può scrivere come unione di
elem. della base. (ok)

\Leftarrow | Supp. 1) e 2) per \mathcal{B} , dim. che $\exists \mathcal{T}$. Definiamo

$\mathcal{T} = \{ \text{unioni qualsiasi di elem. di } \mathcal{B} \}$

Verifichiamo gli assiomi di topologia per \mathcal{T} :

1) $\emptyset = \text{unione vuota di elem. di } \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

X si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B} \Rightarrow X \in \mathcal{T}$

2) Unioni di elem. di \mathcal{T} sono in \mathcal{T} : ovvio dalla def.

3) Siano $A, A' \in \mathcal{T}$, allora sono unioni di elem. di \mathcal{B} :

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{con } A_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in I$$

$$A' = \bigcup_{j \in J} D_j \quad \text{con } D_j \in \mathcal{B} \quad \forall j \in J$$

$$\text{Segue: } A \cap A' = \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j D_j \right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap D_j)$$

Ora, ogni $A_i \cap D_j$ si scrive come unione di elem. di \mathcal{B} , quindi anche $A \cap A'$ complessivamente si scrive come unione di elem. di \mathcal{B} , cioè $A \cap A' \in \mathcal{T}$.

□

Def: Siano $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologie su X . Se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ allora \mathcal{T}_2 si dice più fine di \mathcal{T}_1 .

Oss.: Se \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 sono topologie su X , non è detto che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ sia una topologia. Invece $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è una topologia sicuramente, ed è meno fine di \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 .

In generale, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di topologie è una topologia.

Esempio: Sia K un campo (ad es. $K = \mathbb{R}$ opp. \mathbb{C}), e consid. su $K^m = X$.

Dato $f \in K[x_1, \dots, x_m]$ polinomio, def.

$$X_f = \{p \in X \mid f(p) \neq 0\}$$

e consid. $\mathcal{B} = \{X_f \mid f \in K[x_1, \dots, x_m]\}$.

Oss.: $X_1 = X$, e dati f, g polinomi vale

$$X_f \cap X_g = \{p \in X \mid f(p) \neq 0 \text{ e } g(p) \neq 0\} = X_{f \cdot g}$$

Quindi X è unione di elem. di \mathcal{B} (anzi, qui X stesso è un elem. di \mathcal{B}), e l'intersez. di due elem. di \mathcal{B} è un elem. di \mathcal{B}

(anzi, qui quest'intersez. è essa stessa un elem. di \mathcal{B}). Dalla

prop. segue: esiste una topologia \mathcal{T} che ha \mathcal{B} come base.

\mathcal{T} si dice topologia di Zariski su K^m .

Parte interna, chiusa, intorno

Def.: Sia X spazio topologico e $D \subseteq X$ sottoinsi. qualsiasi.

Definiamo:

la parte interna di D : $D^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq D \\ A \text{ aperto}}} A$

la chiusura di D : $\bar{D} = \bigcap_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} C$

la frontiera di D : $\partial D = \bar{D} \setminus D^\circ$

I punti di D° si dicono interni a D , quelli di \bar{D} si dicono aderenti a D .

Oss.: D° è aperta, anzi è il più grande aperto contenuto in D , perché contiene tutti gli aperti contenuti in D . Analogam. \bar{D} è chiusa, anzi è il più piccolo chiuso contenente D . Anche ∂D è chiusa, perché

$$\partial D = \bar{D} \setminus D^\circ = \underbrace{\bar{D}}_{\text{chiusi}} \cap \underbrace{(X \setminus D^\circ)}_{\text{chiusi}}$$

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea e $D = [0, 1]$, allora

$$D^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq [0, 1] \\ A \text{ ap.}}} A =]0, 1[$$

In fatti se $a \in]0, 1[\subseteq D$ allora $a \in D^\circ$, invece $0 \notin D^\circ$

perché se esistesse un aperto A con $0 \in A \subseteq [0, 1]$ allora A conterrebbe un intervallo aperto $]b, c[$ contenente 0 : assurdo

perché $A \in [0,1]$. Analogamente $1 \notin D^\circ$, quindi $D^\circ =]0,1[$.

Esercizio: dim. che $\overline{]0,1[} = [0,1]$ (sempre in top. euclidea).

2) $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita. Allora nessun aperto non vuoto è contenuto in $[0,1]$, quindi con questa topologia abbiamo

$$[0,1]^\circ = \emptyset \quad (!)$$

3) $X = \mathbb{R}$, \mathcal{T} topologia per cui A aperto $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oppure $A \ni 0$.

Allora $\overline{\{1\}} = \{1\}$ (infatti $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ è aperto, $\{1\}$ è chiuso)

ma $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$ (!) perché se C è un chiuso

contenente $\{0\}$, allora $\mathbb{R} \setminus C$ è un aperto $\neq \emptyset$, per cui $\mathbb{R} \setminus C = \emptyset$ e $C = \mathbb{R}$.

Def.: $D \subseteq X$ si dice denso se $\overline{D} = X$.

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea; $D = \mathbb{Q}$ è denso, infatti

sia C chiuso contenente \mathbb{Q} , allora $\mathbb{R} \setminus C$ è un aperto che non interseca \mathbb{Q} . Ma ogni intervallo aperto (non vuoto) ha elementi di \mathbb{Q} , quindi per forza $\mathbb{R} \setminus C = \emptyset$, $C = \mathbb{R}$. Segue

$$\overline{Q} = \bigcap_{\substack{C \supseteq Q \\ C \text{ chiuso}}} C = \mathbb{R},$$

Osservazione: 1) Per ogni $D \subseteq X$, vale

$$X \setminus (\overline{D}) = (X \setminus D)^{\circ}$$

$$\text{infatti } X \setminus (\overline{D}) = X \setminus \left(\bigcap_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} C \right) =$$

$$= \bigcup_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} (X \setminus C) = \dots$$

D'altronde: $C \supseteq D$ e C chiuso $\Leftrightarrow X \setminus C \subseteq X \setminus D$ e $X \setminus C$ aperto

quindi chiamando $A = X \setminus C$ abb.

$$\dots = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \setminus D \\ A \text{ aperto}}} A = (X \setminus D)^{\circ}$$

2) D denso $\Leftrightarrow D$ interseca ogni aperto non vuoto
(dim. per esercizio)

Def. 1: Siano X sp. topologico, $x \in X$. \forall sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice intorno di x se $\exists A \subseteq X$ aperto tale che

$$x \in A \subseteq U.$$

La famiglia di tutti gli intorni di x è denotata come:

$$\mathcal{I}(x) = \{U \subseteq X \mid U \text{ è intorno di } x\}$$

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, $x = 0$

allora $] -1, 1[$ e $[-1, 1]$ sono entrambi

intorni di x , verifichiamo la def.:

$$x \in \underbrace{]-1, 1[}_{A} = \underbrace{[-1, 1]}_{U=A \text{ è}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{esso stesso} \\ \text{aperto} \end{array} \right\}$$

$$x \in \underbrace{]-1, 1[}_{A} \subseteq \underbrace{[-1, 1]}_{U}$$

o anche

$$x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}[\subseteq [-1, 1]$$

Oss. 1: 1) Dati $U \subseteq X$ e $x \in X$:

$$U \text{ è intorno di } x \iff x \in U^\circ$$

2) U è aperto \iff è intorno di ogni suo punto (esercizio del foglio n.1)

$$\exists \forall U \text{ vale } (U^\circ)^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ ap.} \\ A \subseteq U^\circ}} A = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ ap.} \\ A \subseteq U}} A = U^\circ.$$

Analogamente

$$(\overline{U})^\circ = \overline{U^\circ}$$

sono uguali perché se A è aperto e $A \subseteq U$ allora $A \subseteq U^\circ$, verifica facile!

Lemma: Siano X sp. topologico, $x \in X$, $D \subseteq X$. Allora

$$x \in \bar{D} \iff \forall U \in \mathcal{I}(x): D \cap U \neq \emptyset.$$

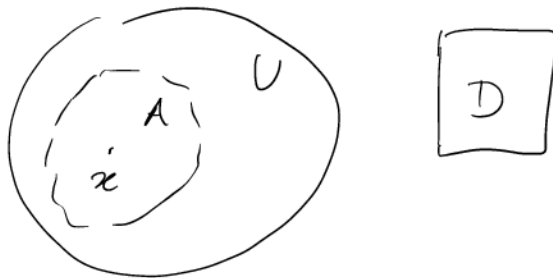
Dim.: \Rightarrow Supp. $x \in \bar{D}$ e sia $U \in \mathcal{I}(x)$. Supp. per assurdo

$$D \cap U = \emptyset, \text{ e sia } A \subseteq X \text{ aperto tale che } x \in A \subseteq U$$

Allora $D \cap A = \emptyset$.

Consid. $X \setminus A = C$, che è chiuso. Abb. $C \not\ni x$

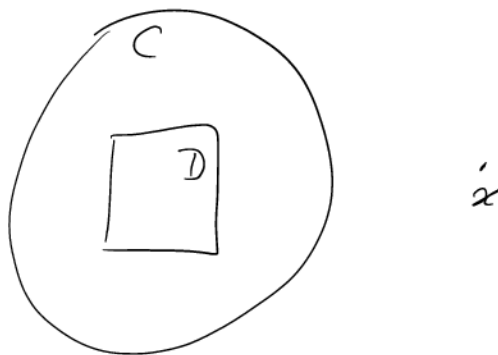
perché $x \in A$, e $C \supseteq \bar{D}$ perché \bar{D} è l'intersez. di tutti i chiusi che cont. D . Allora $\bar{D} \not\ni x$: assurdo.



\Leftarrow Per assurdo sia $x \notin \bar{D}$. Allora x non è in tutti i chiusi che cont. D , quindi c'è un chiuso C con $x \notin C \supseteq D$.

Consid. $A = X \setminus C$, è un aperto che contiene x , quindi

$A \in \mathcal{I}(x)$, ma A non interseca D : assurdo.



□

Def.: Siano X sp. top., $x \in X$. Una famiglia $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(x)$ di intorno di x è detta sistema fondamentale di intorno di x , o base locale in x , se

$$\forall U \in \mathcal{I}(x) \exists V \in \mathcal{J} \mid V \subseteq U.$$

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

$$\mathcal{J} = \{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

$$\mathcal{J}' = \{ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \}$$

Sono sist. fond. di intorni. Infatti sono intorni, e

$$\left(\begin{array}{l} \text{verifica} \\ \text{della} \\ \text{def.} \end{array} : \begin{array}{l}]x - \varepsilon, x + \varepsilon[= U = A \ni x \\ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] = U \supseteq A =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\ni x \end{array} \right)$$

dato un intorno $U \ni x$ esiste un aperto A t.c. $U \supseteq A \ni x$, visto che A è aperto $\exists \delta > 0 \mid]x - \delta, x + \delta[\subseteq A$. Scegliamo

$$n \geq \frac{1}{\delta}, \text{ e } \varepsilon = \delta, \text{ allora}$$

$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ appartiene a \mathcal{J} ed è cont. in U

$$[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \longrightarrow \text{—————}$$

Esercizio: Dim. che $\mathcal{J}'' = \{ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{2}{n}[+ \{x + \frac{3}{n}\} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ è sist. fond. di intorni di $x \in \mathbb{R}$ con top. euclidea.

Applicazioni continue

Def: Siano X, Y spazi topologici. Un'appl. $f: X \rightarrow Y$ si dice

continua se $\forall A \subseteq Y$ aperto: $f^{-1}(A)$ è aperto.

Esempi: 1) Se X ha top. discreta, ogni appl. $X \rightarrow Y$ è continua.

2) Se Y ha top. banale, ogni appl. $X \rightarrow Y$ è continua.

3) Se X e Y hanno top. cofinite, e $f: X \rightarrow Y$ è iniettiva, allora è continua. Infatti sia

$A \subseteq Y$ aperto. Se $A = \emptyset$ allora $f^{-1}(A) = \emptyset$ quindi

$f^{-1}(A)$ è aperto. Altrimenti $Y \setminus A$ è finito, e

$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ è il complement. di

$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\}$ che è uguale a

$\{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\} = f^{-1}(Y \setminus A)$. Visto che $Y \setminus A$ è

un ins. finito, e f è iniettiva, allora $f^{-1}(Y \setminus A)$ è

un ins. finito, perciò $f^{-1}(A)$ è aperto.

Oss.: Per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$ vale

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(A) &= \{x \in X \mid f(x) \notin A\} = \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\} \\ &= f^{-1}(Y \setminus A) \end{aligned}$$

D'altronde gli insiemi $Y \setminus A$ con A aperto sono esattamente

i diversi di Y . Quindi: f continua \Leftrightarrow

$f^{-1}(A)$ ap. $\forall A \subseteq Y$ aperto $\Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(A)$ chiuso $\forall A \subseteq Y$ ap.

$\Leftrightarrow f^{-1}(Y \setminus A)$ chiuso $\forall A \subseteq Y$ ap \Leftrightarrow $f^{-1}(C)$ chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso

L'analogo della solita def. di funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua in un punto e^- :

Def.: Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione fra sp. topologici, e sia $p \in X$.

f si dice continua in p se $\forall U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ $\exists V \subseteq X$ intorno di p tale che $f(V) \subseteq U$.

Teorema: Sia $f: X \rightarrow Y$ applicaz. fra sp. topologici. Sono equivalenti:

1) $\forall p \in X$: f è continua in p

2) $\forall Z \subseteq X$ sottoinsieme: $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$

3) f è continua.

Dim.: 1) \Rightarrow 2) Sia $p \in \overline{Z}$, dim. che $f(p) \in \overline{f(Z)}$. Grazie a un lemma precedente, per dim. che $f(p) \in \overline{f(Z)}$ basta dim. che $f(Z) \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{I}(f(p))$, quindi sia $U \in \mathcal{I}(f(p))$.

Per 1), esiste $V \in \mathcal{I}(p)$ con $f(V) \subseteq U$.

D'altronde $p \in \overline{Z}$, quindi per lo stesso lemma vale

$\forall z \neq \emptyset$, ma allora $f(\bigcup z)$ contiene punti di U che sono anche in $f(z)$, cioè $\bigcup f(z) \neq \emptyset$.

2) \Rightarrow 3) Usiamo il fatto già visto: f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso. Sia allora $C \subseteq Y$ chiuso, consid.

$f^{-1}(C)$ e la sua chiusura $\overline{f^{-1}(C)}$. Abb.

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{f(x) \cap C} \subseteq C$$

\uparrow
 $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(x)$

\uparrow
 perché C è chiuso e contiene $f(x) \cap C$

Da questo segue $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, ma in generale la chiusura contiene il sottoinsieme, da cui $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$, cioè $f^{-1}(C)$ è chiuso.

3) \Rightarrow 1) Sia $p \in X$, verifichiamo che f è continua in p , quindi sia $U \in \mathcal{I}(f(p))$, sia $A \subseteq Y$ aperto con $U \ni A \ni f(p)$, allora $f^{-1}(A)$ è aperto, contiene p , e $f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$, quindi poss. scegliere $V = A$.

□

Proposizione: La composizione di due appl. continue qualsiasi è continua.

Dim.: Cioè date $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dove X, Y, Z sono sp. top. e f, g sono continue, va dim. che $g \circ f$ è

continua. Sia $A \subseteq Z$ aperto, allora

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(A) &= \{x \in X \mid g(f(x)) \in A\} = \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(A)\} = \\ &= f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\uparrow \text{ap. in } Y}\right) = \text{ap. in } X\end{aligned}$$

□

Def.: Siano X, Y sp. topologici, $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione.

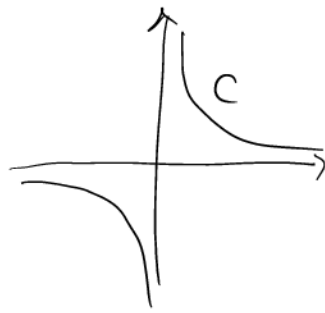
- 1) f si dice omeomorfismo se f è biettiva, continua, e $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è continua.
- 2) X e Y si dicono omeomorfi se esiste $f: X \rightarrow Y$ omeomorfismo.
- 3) f (non nec. omeom., non nec. continua) si dice aperta se $f(A)$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto. Invece f si dice chiusa se $f(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq X$ chiuso.

Esempio: Esempio importante di applicazione non chiusa:

$$\begin{array}{ccc} \pi: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dove mettiamo la top. euclidea} \\ \text{su } \mathbb{R}^2 \text{ e } \mathbb{R}. \end{array}$$

π non è chiusa, perché ad es.

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1 \}$$



è chiuso, verifica:

$$C = m^{-1}(\{1\})$$

dove poniamo $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, che è continua, $\{1\}$ è chiuso
 $(x,y) \mapsto xy$

in top. euclidea (infatti $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ è aperto),
 quindi C è chiuso. Ma $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso!

Esercizio: Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non è chiusa (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R} con top. euclidea)
 $(a,b) \mapsto a+b$

Spazi metrici

Def.: Sora X un insieme. Un'applicazione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice distanza se valgono:

$$1) d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X, \quad \text{e} \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$$

$$2) d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$$

$$3) d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$$

disuguaglianza triangolare

In tal caso (X, d) (o semplicem. X) si dice spazio metrico.

Esempio: 1) Sia X un insieme qualsiasi, definiamo

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{come } d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Questa d è una distanza, l'unica verifica da fare è 3), dove il rischio sarebbe avere $0+0 > 1$, ma se $d(x,y) + d(y,z) = 0$ allora $x=y=z$ e quindi $d(x,z) = 0$

2) In \mathbb{R}^m :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_m) \\ y = (y_1, \dots, y_m) \end{array}$$

$$d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Def: Sia (X,d) sp. metrico, $x \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

1) La palla aperta di centro x e raggio ε è

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \quad \left(= B_\varepsilon^d(x) \text{ se vogliamo specificare che usiamo } d \right)$$

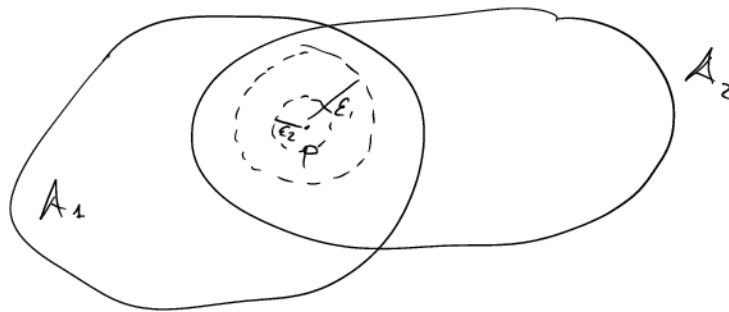
2) La topologia indotta da d su X è definita come:

$$A \text{ aperto} \Leftrightarrow \forall a \in A \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A$$

La denotiamo con \mathcal{T}_d .

Verifichiamo che \mathcal{T}_d è una topologia:

- 1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}_d$: ovvio
- 2) unioni di el. di \mathcal{T}_d sono in \mathcal{T}_d : ovvio
- 3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_d$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_d$. Sia $p \in A_1 \cap A_2$, scegliamo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c.
 $B_{\varepsilon_i}(p) \subseteq A_i \quad \forall i \in \{1, 2\}$.

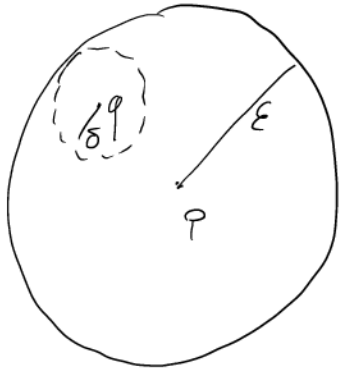


sia $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, allora $\varepsilon > 0$ e $B_\varepsilon(p) \subseteq A_1 \cap A_2$
quindi $A_1 \cap A_2$ è aperto.

Lemma: Sia (X, d) spazio metrico e \mathcal{T}_d la topologia indotta da d .

- 1) $\forall p \in X \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$: $B_\varepsilon(p)$ è aperto in \mathcal{T}_d
- 2) Ogni aperto di \mathcal{T}_d è unione di palle aperte, cioè
 $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$ è una base di \mathcal{T}_d
- 3) Un sottos. $U \subseteq X$ è intorno di un punto $p \in X$ se e solo se $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

Dilu.: 1) Sia $q \in B_\varepsilon(p)$, poniamo $\delta = \varepsilon - d(p, q)$ ($\varepsilon > 0$)



e abb. $B_\delta(q) \subseteq B_\varepsilon(p)$ perché

$\forall x \in B_\delta(q)$ vale $d(x, p) \leq$

$$d(x, q) + d(q, p) < (\varepsilon - d(p, q)) + d(q, p) = \varepsilon$$

2) Sia $A \subseteq X$ aperto, per ogni $a \in A$ scegliamo $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c.

$B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq A$, allora

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a)$$

3) U intorno di $p \Rightarrow \exists A \subseteq U$ ap. con $A \ni p \Rightarrow$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \mid B_\varepsilon(x) \subseteq U \Rightarrow U$ è intorno di p
 \uparrow
 $B_\varepsilon(x)$ è aperto per 1) □

Oss.: Gli spazi metrizi sono un po' simili a \mathbb{R}^n con top. euclidea, ma possono succedere anche cose inaspettate! Ad esempio

dati $p \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme

$\{x \in X \mid d(p, x) \leq \varepsilon\}$ è un chiuso, ma non

è sempre la chiusura di $B_\varepsilon(p)$! (v. esercizi foglio m.2).

Proposizione: Siano X, Y spazi metrici, $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione.

f continua in $p \in X \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid$ se $d(x, p) < \delta$
per un $x \in X$, allora $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$

Dim.: Esercizio

□

Corollario: Siano d, h distanze su un insieme X , allora T_d è

più fine di T_h se e solo se $\forall p \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid$

$$B_\delta^d(p) \subseteq B_\varepsilon^h(p).$$

Dim.: Consid. l'identità $\text{id}_X: X \rightarrow X$. Abbiamo:

T_d più fine di $T_h \iff \text{id}_X: X \rightarrow X$ è continua, dove in

X come codominio prendiamo la topologia T_h , e in X

come dominio prendiamo la topologia T_d .

La continuità di id_X è equivalente alla condiz. del corollario grazie alla prop. precedente.

□

Def: Due distanze d, h su un insieme X si dicono equivalenti se $T_d = T_h$.

Esempio: Su \mathbb{R}^n la distanza euclidea d e le distanze d_1 e d_∞ sono equivalenti, grazie al corollario precedente e alle disuguaglianze

$$d_\infty(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$

che valgono $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Def: Sia X uno spazio topologico. Se esiste una distanza su X che induce la topologia già data su X , allora lo sp. top. X si dice metrizzabile.

Sottospazi topologici

Def: Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi. Su Y è definita una topologia detta di sottospazio, nel modo seguente:

$$A \subseteq Y \text{ aperto in top. di sottosp.} \iff \exists B \subseteq X \text{ aperto} \mid B \cap Y = A.$$

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = [0, 1]$. Gli aperti di Y con topologia di sottosp. sono ottenuti intersecando aperti di $X = \mathbb{R}$ con Y , ad

es. $I =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\subseteq \mathbb{R}$ è aperto di X , allora

$I \cap Y =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[= I$ è aperto (anche) di Y .

Ma: $[0, \frac{1}{2}[= \underbrace{]-1, \frac{1}{2}[\cap Y}$, quindi $[0, \frac{1}{2}[$ è aperto in $[0, 1]$,
 "aperto
 di X

nel senso che $[0, \frac{1}{2}[$ è aperto in $[0, 1]$ in topologia di sottospazio.

Ma $[0, \frac{1}{2}[$ non è aperto in X !

Analogam. $[0, 1] = \underbrace{]-1, 2[\cap Y}$ quindi $[0, 1]$ stesso è aperto in $[0, 1]$,
 "ap. di X

anche se $[0, 1]$ non è aperto in \mathbb{R} .

2) Sempre $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{Z}$. La topologia di sottospazio di Y è la topologia discreta, infatti $\forall m \in Y$ abb.

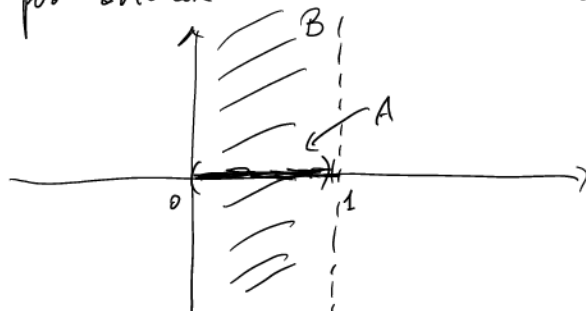
$$\{m\} = \underbrace{]m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}[}_{\text{ap. in } X = \mathbb{R}} \cap \underbrace{\mathbb{Z}}_Y$$

quindi $\forall m \in Y$: $\{m\}$ è aperto in Y . Visto che unioni qualsiasi di aperti è aperta, qualsiasi sottosms. di Y è aperto in questa topologia.

3) $X = \mathbb{R}^2$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ (\leftarrow cioè Y è l'asse x).

$A =]0, 1[\times \{0\}$ è aperto in Y in top. di sottospazio? Sì, ad es.

si può ottenere come
$$]0, 1[\times \{0\} = \underbrace{]0, 1[\times \mathbb{R}}_{B} \cap Y$$

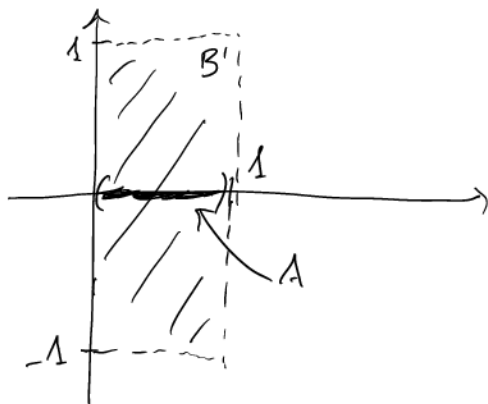


$B =$ "striscia verticale illimitata"

oppure anche come

$$]0,1[\times \{0\} = \underbrace{]0,1[\times]-1,1[}_{B'} \cap Y$$

" B' = un "rettangolo aperto"



Oss.: Verifichiamo che la top. di sottospazio è effettivamente una topologia.

Denotiamo con T la top. su X , e poniamo

$$T_Y = \{A \subseteq Y \mid \exists B \in T \mid B \cap Y = A\} \leftarrow \text{"candidata topologia"}$$

Verifichiamo gli assiomi di topologia per T_Y :

$$1) \phi = \phi \cap Y, \quad Y = X \cap Y, \quad \text{quindi } \phi, Y \in T_Y$$

\uparrow $\in T$ \uparrow $\in T$

2) Siano $A_i \in T_Y \quad \forall i \in I$, scegliamo $B_i \in T$ con $B_i \cap Y = A_i$,

allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)}_{\in T} \cap Y$$

da cui $\bigcup_{i \in I} A_i \in T_Y$.

3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_Y$, scegliamo $B_i \in \mathcal{T}$ con $B_i \cap Y = A_i$
 $\forall i \in \{1, 2\}$, e allora

$$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{T}} \cap Y$$

quindi anche $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_Y$.

Oss.: Sia $C \subseteq Y$ chiuso in top. di sottospazio, allora $A = Y \setminus C$
 è aperto, quindi esiste $B \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = B \cap Y$,
 cioè $A = B \cap Y$. Consid. $X \setminus B$, che è chiuso in X .

Vale $C = Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = Y \setminus B = Y \cap (X \setminus B)$.

Quindi: C è chiuso in $Y \Rightarrow$ esiste un chiuso $D (= X \setminus B)$ tale che
 $C = Y \cap D$. Vale anche il viceversa " \Leftarrow ": esercizio.

Oss.: Sia $Y \subseteq X$ con top. di sottospazio, consid. l'inclusione di Y in X :

$$\begin{aligned} \iota: Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto y \end{aligned}$$

L'inclusione ι è continua, verifica: sia $B \subseteq X$ aperto, allora
 $\iota^{-1}(B) = B \cap Y$ che è aperto in topologia di sottospazio.

Supponiamo ora Y abbia una top. diversa da quella di sottospazio, mettiamo \mathcal{T}_Y e supponiamo però $\iota: Y \rightarrow X$ sempre continua. Allora gli insiemi del tipo $Y \cap B$ con $B \subseteq X$ aperto devono comunque essere in \mathcal{T}_Y , cioè:

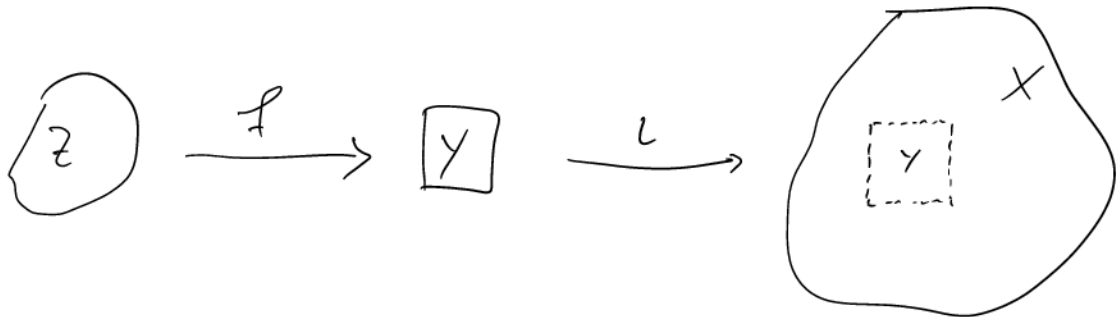
$$\mathcal{T}_Y \supseteq \{ Y \cap B \mid B \text{ aperto di } X \} \quad (= \text{topologia di sottosp.})$$

Cioè la top. di sottospazio su Y è la meno fine fra quelle per cui l'inclusione $\iota: Y \rightarrow X$ è continua.

Proposizione: Sia $f: X \rightarrow Z$ appl. continua fra sp. top., e sia $Y \subseteq X$ con top. di sottospazio. Allora $f|_Y: Y \rightarrow Z$ è continua.

Dim.: $f|_Y = f \circ \iota$ dove $\iota: Y \rightarrow X$ è l'inclusione. \square

Proposizione: Siano X sp. topologico, $Y \subseteq X$ con top. di sottosp., Z uno sp. top., e $f: Z \rightarrow Y$. L'appl. f è continua se e solo se $\iota \circ f: Z \rightarrow X$ è continua.



Dim.: \Rightarrow ovvio perché composiz. di appl. continue è continua.

\Leftarrow Supponiamo $\iota \circ f$ continua, dim. che f è continua. Sia $A \subseteq Y$ aperto in Y , sia $B \subseteq X$ aperto in X tale che

$$A = Y \cap B, \text{ allora } f^{-1}(A) = \left\{ z \in Z \mid \underbrace{f(z)}_Y \in A \right\} \text{ è uguale}$$

anche $\{z \in Z \mid \underbrace{\iota(f(z)) \in A}_{\substack{\parallel \\ f(z) \in Y}}\} = \{z \in Z \mid \underbrace{\iota(f(z)) \in B}_{\substack{\uparrow \\ \text{un punto di } Y \text{ è anche} \\ \text{in } B \text{ se e solo se è in } A}}\} = (\iota \circ f)^{-1}(B)$

e $(\iota \circ f)^{-1}(B)$ è aperto in Z .

□

Oss.: Data $f: Z \rightarrow X$, consid. la restrizione del codominio $\tilde{f}: Z \rightarrow f(Z)$. Vale:
 f continua $\Leftrightarrow \tilde{f}$ continua, infatti $f = \iota \circ \tilde{f}$ dove

$\iota: f(Z) \rightarrow X$ è l'inclusione.
 $z \mapsto z$

Dati X sp. top. e Y con top. di sottospazio, consid. un sottosp. $Z \subseteq Y$.

Parte interna e chiusura di Z come sottosp. di X possono essere diverse da parte interna e chiusura di Z come sottosp. di Y .

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = [0, 1[$ con top. di sottosp.,
 $Z =]0, 1[$. Sappiamo: come s. ins. di X , la chiusura di
 Z è $[0, 1]$. Ma come sottosp. di Y la chiusura di Z è
 $[0, 1[$ (verifica: esercizio).

Tuttavia vale:

$$\underbrace{[0, 1[}_{\substack{\uparrow \\ \text{chiusura di } Z \\ \text{in } Y}} = Y \cap \underbrace{[0, 1]}_{\substack{\nwarrow \text{chiusura di } Z \\ \text{in } X}}$$

Lemma: Dati X, Y, Z come sopra, la chiusura di Z in Y è uguale all'intersez. di Y con la chiusura di Z in X .

Dimo.: (chiusura di Z in Y) = $\bigcap_{\substack{C \subseteq Y \\ C \text{ chiuso in } Y \\ C \supseteq Z}} C = \dots$

Per ogni C scegliamo un $D \subseteq X$ chiuso in X t.c. $C = Y \cap D$:

$$\dots = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y \text{ chiuso in } Y \\ C \supseteq Z, D \text{ è scelto} \\ \text{fra i chiusi di } X \text{ tale che} \\ C = D \cap Y}} D \cap Y = \bigcap_{\substack{D \text{ chiuso} \\ \text{in } X, D \supseteq Z}} D \cap Y =$$

↑
attenzione!

$$= \left(\bigcap_{\substack{D \text{ chiuso} \\ \text{di } X \text{ con} \\ D \supseteq Z}} D \right) \cap Y$$

← chiusura di Z in X

□

ES: Attenzione: non vale la stessa cosa con la parte interna, ad es. $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{Z}$, $Z = \{0\}$. Allora la parte interna di Z come sottos. di X è vuota, però Y con top. di sottograzzo ha top. discreta, e Z è aperto in Y , quindi la parte interna di Z come sottos. di Y è Z stesso.

Def.: Siano X, Y sp. top.. Un'applicaz. $f: X \rightarrow Y$ si dice immersione (topologica) se f è continua, iniettiva, e gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$ con $A \subseteq Y$ aperto.

Oss.: Data f iniettiva, vale:

f immersione \Leftrightarrow la restrizione $\tilde{f}: X \rightarrow f(X)$ è un omeom.
 $x \mapsto f(x)$

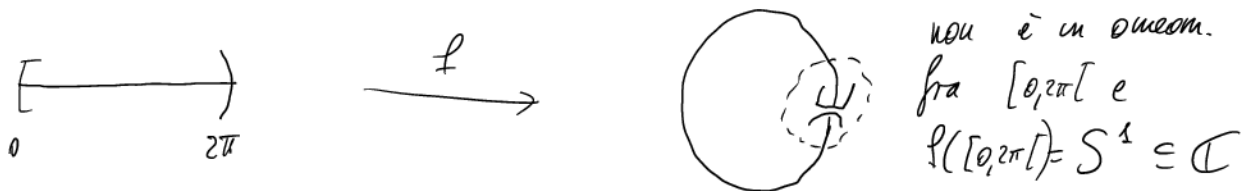
fra X e $f(X) (\subseteq Y)$ dotato della top. di sottospazio come sottosp. di Y

Esercizio: dimostrare quest'equivalenza.

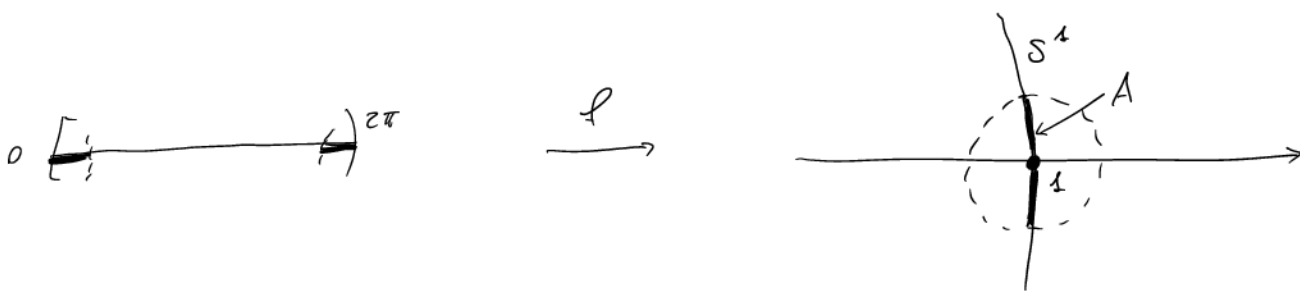
Esempio: 1) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'immersione (\mathbb{R} e \mathbb{R}^2 con top. euclidea)
 $x \mapsto (x, 0)$

2) $f: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$ ($[0, 1[$ con top. euclidea, \mathbb{C} anche
 $t \mapsto e^{it}$ identificando con \mathbb{R}^2)

è continua e iniettiva, ma non è un'immersione:



ad es. $[0, \pi[$ è un aperto di $[0, 2\pi[$, ma non è la controimm. di alcun aperto di S^1 messo in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con top. di sottospazio. Infatti se ho un aperto $A \subseteq S^1$ contenente il punto $1 \in \mathbb{C}$, allora A contiene punti sopra e sotto l'asse reale,



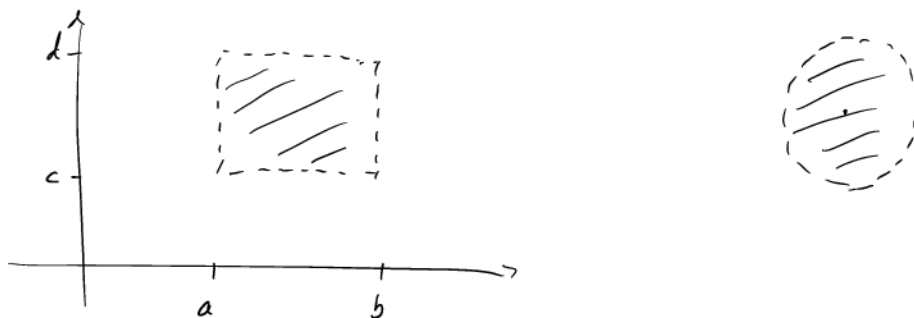
quindi la controimmagine di A contiene punti vicini al "bordo destro" di $[0, 2\pi[$, cioè $f^{-1}(A)$ deve contenere $]2\pi - \varepsilon, 2\pi[$ per qualche $\varepsilon > 0$, perciò non esiste A tale che $f^{-1}(A) = [0, \pi[$.

Prodotti di spazi topologici

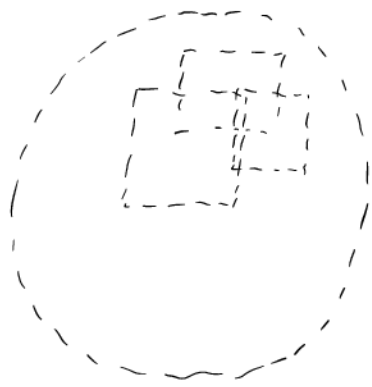
Siano P, Q sp. topologici, vogliamo definire una topologia "naturale" sul prodotto $P \times Q$.

Esempio: Consid. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con top. euclidea. Dovrebbe essere il prodotto di \mathbb{R} con \mathbb{R} con top. euclidea, descriviamo gli aperti di \mathbb{R}^2 con quest'idea in mente.

Intanto, dati $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ aperti, il prodotto $U \times V$ è aperto. Ad es. se $U =]a, b[$, $V =]c, d[$, il prod. $U \times V$ è un rettangolo aperto:



Pero' ci sono aperti di \mathbb{R}^2 che non sono fatti così, ad es. un disco aperto. Tuttavia nel foglio di eserc. c'è un esercizio che dice "i rettangoli aperti sono una base della top. euclidea su \mathbb{R}^2 ":



infatti anche una palla aperta, che non è uguale a $U \times V$ per alcuna scelta di aperti $U, V \subseteq \mathbb{R}$, però si scrive come unione di aperti del tipo $U \times V$.

Questo esempio suggerisce che una base della top. su $P \times Q$ dovrebbe essere

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subseteq P, V \subseteq Q \text{ aperti} \}$$

È vero, ma definiamo la top. su $P \times Q$ in modo diverso.

Def.: La topologia prodotto su $P \times Q$ è la meno fine che rende continue le proiezioni

$$\begin{array}{l} p: P \times Q \longrightarrow P, \quad q: P \times Q \longrightarrow Q \\ (x, y) \longmapsto x \quad \quad \quad (x, y) \longmapsto y \end{array}$$

Oss.: Questa top. è ben definita, perché è semplicem. l'intersezione di tutte le topologie possibili su $P \times Q$ per le quali le due

Proiezioni sono continue.

Teorema: Siano P, Q spazi topologici, e $P \times Q$ con top. prodotto.

1) $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \subseteq P \text{ aperto, } V \subseteq Q \text{ aperto}\}$ è una base della top. prodotto su $P \times Q$.

2) Per ogni $x_0 \in P, y_0 \in Q$ le applicazioni

$$p \Big|_{P \times \{y_0\}} : P \times \{y_0\} \longrightarrow P$$

$$(x, y_0) \longmapsto x$$

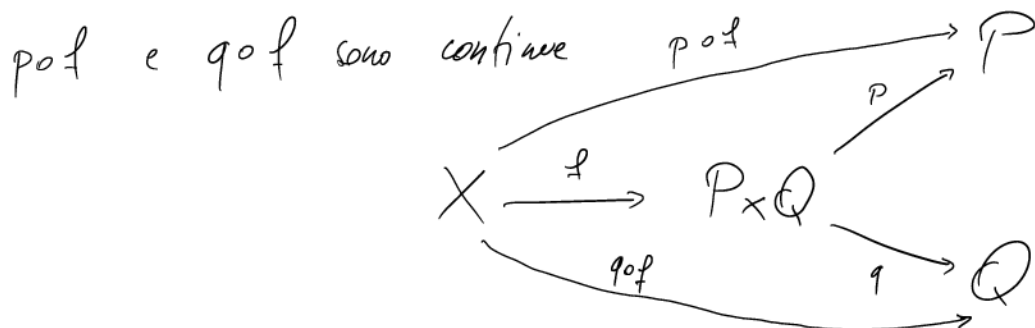
$$q \Big|_{\{x_0\} \times Q} : \{x_0\} \times Q \longrightarrow Q$$

$$(x_0, y) \longmapsto y$$

sono omeomorfismi, dove stiamo consid. i sottoinsiemi $P \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Q$ di $P \times Q$ entrambi con top. di sottospazio.

3) Le proiezioni p e q sono (continue e) aperte.

4) Sia X sp. topologico, e sia $f: X \rightarrow P \times Q$ un'applicazione. Allora f è continua se e solo se



Dim.: 1) Verifichiamo prima che esiste una top. T su $P \times Q$ di cui

\mathcal{B} è una base, verificando le propr. viste in una proposizione:

a) $P \times Q$ dev'essere unione di elem. di \mathcal{B} : ok, basta

prendere $U=P$, $V=Q$, cioè $P \times Q$ è un elem. di \mathcal{B} .

b) Siano $U, U' \subseteq P$ aperti, $V, V' \subseteq Q$ aperti, verif. che

$W = (U \times V) \cap (U' \times V')$ si scrive come unione di elem. di \mathcal{B} .

$$\text{Abbiamo } (U \times V) \cap (U' \times V') = \underbrace{(U \cap U')}_{\substack{\uparrow \\ \text{ap. in } P}} \times \underbrace{(V \cap V')}_{\substack{\uparrow \\ \text{p. in } Q}}$$

quindi W è esso stesso un elem. di \mathcal{B} .

Concludiamo che T esiste, verifichiamo che è proprio la top. prodotto.

Prima di tutto, se mettiamo su $P \times Q$ la top. T allora p e q sono continue. Infatti dato $A \subseteq P$ aperto, abbiamo

$$p^{-1}(A) = A \times Q$$

che è un elem. di \mathcal{B} e quindi è aperto per la top. T . Analogamente, anche q è continua. Segue che la top. prodotto è meno fine di

T , per def. di topologia prodotto.

Viceversa, sia $U \times V$ un elem. di \mathcal{B} , con $U \subseteq P$ e $V \subseteq Q$ aperti.

Allora

$$U \times V = (U \times Q) \cap (P \times V) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

è intersec. di due aperti in topologia prodotto, perché p e q sono

continue se mettiamo su $P \times Q$ la top. prodotto. Allora ogni elem. di \mathcal{B} è aperto per la topologia prodotto, per cui \mathcal{T} è meno fine della topologia prodotto. Quindi le due topologie sono uguali, e \mathcal{B} è base di entrambe.

2) Dim. che

$$\begin{array}{ccc}
 P \Big|_{P \times \{y_0\}} & : P \times \{y_0\} & \longrightarrow P \\
 & (x, y_0) & \longmapsto x
 \end{array}$$

è un omeomorfismo. Intanto è biettiva e continua, perché le restrizioni (al dominio) di appl. continue sono continue.

Verifichiamo che l'inversa è continua, chiamiamola φ :

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi : P & \longrightarrow & P \times \{y_0\} \\
 x & \longmapsto & (x, y_0)
 \end{array}$$

Dobbiamo dim. che $\varphi^{-1}(A)$ è aperto $\forall A \subseteq P \times \{y_0\}$ aperto, basta farlo per ogni aperto di una base (esercizio dei fogli settimanali). Inoltre, per ottenere una base per il sottospazio $P \times \{y_0\}$ di $P \times Q$, si può prendere una base di $P \times Q$

e intersecare tutti i suoi elem. col sottospazio (altro eserc. dei fogli settimanali). Usando \mathcal{B} , otteniamo la base

$$\{(U \times V) \cap (P \times \{y_0\}) \mid U \subseteq P, V \subseteq Q \text{ aperti}\}$$

del sottosp. $P \times \{y_0\}$. Dato $A = (U \times V) \cap (P \times \{y_0\})$

in questa base, vale:

$$A = \begin{cases} U \times \{y_0\} & \text{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{se } y_0 \notin V \end{cases}$$

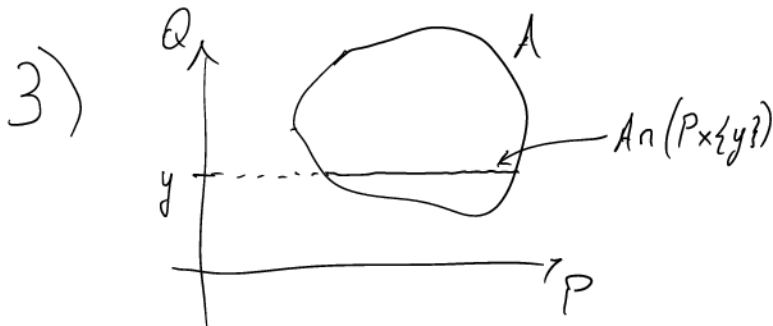
e quindi

$$\varphi^{-1}(A) = \begin{cases} U & \text{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{se } y_0 \notin V \end{cases}$$

φ aggiunge
la seconda comp. $= y_0$,
 φ^{-1} la toglie

per cui φ è continua.

Il ragionam. per $q|_{\{x_0\} \times Q} : \{x_0\} \times Q \rightarrow Q$ è analogo.



Sia $A \subseteq P \times Q$
aperto, allora

$$A = \bigcup_{y \in Q} \underbrace{A \cap (P \times \{y\})}_{\text{non necess. aperto in } P \times Q}$$

e vale

$$p(A) = \bigcup_{y \in Q} p(A \cap (P \times \{y\})) =$$

$$= \bigcup_{y \in Q} p|_{P \times \{y\}}(A \cap (P \times \{y\}))$$

Ora $A \cap (P \times \{y\})$ è aperto nel sottosp. $P \times \{y\}$, e

$p|_{P \times \{y\}}$ è un omeomorfismo, quindi abbiamo scritto

$p(A)$ come unione di aperti di P , perciò $p(A)$ è aperto.

La dim. per Q è analoga.

4) Se $f: X \rightarrow P \times Q$ è continua anche $p \circ f$ e $q \circ f$ sono continue.

Viceversa, supponiamo $p \circ f$ e $q \circ f$ continue e dim. che f è continua, cioè che se $A \subseteq P \times Q$ è aperto allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Di nuovo, possiamo dimostrarlo anche solo

per gli aperti A della base \mathcal{B} , quindi sia

$$A = U \times V \quad \text{con } U \subseteq P, V \subseteq Q \text{ aperti.}$$

Abbiamo:

$$f^{-1}(U \times V) = (p \circ f)^{-1}(U) \cap (q \circ f)^{-1}(V)$$

perché $x \in f^{-1}(U \times V)$ se e solo se la prima componente di $f(x)$ è in U (cioè $x \in (p \circ f)^{-1}(U)$) e la seconda è in V (cioè $x \in (q \circ f)^{-1}(V)$). Dalla continuità di $p \circ f$ e $q \circ f$ segue che $f^{-1}(U \times V)$ è aperto.

□

Oss.: Una base della topologia prodotto si può ottenere anche fissando una base \mathcal{B}_P per P e una base \mathcal{B}_Q per Q , e prendere

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_P \text{ e } V \in \mathcal{B}_Q\}$$

(è un esercizio dei fogli settimanali)

Esempi: 1) $P = \mathbb{R}$, $Q = \mathbb{R}$ con top. euclidea. Prendiamo le basi

$$\mathcal{B}_P = \mathcal{B}_Q = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

allora $\{]a, b[\times]c, d[\mid a, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$ è

una base della topologia prodotto su \mathbb{R}^2 . Ma è anche una base della topologia euclidea su \mathbb{R}^2 , quindi queste due topologie su \mathbb{R}^2 sono la stessa.

2) Si può dire che la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove su \mathbb{R} mettiamo la top. di Zariski, non è la topologia di Zariski su \mathbb{R}^2 .

Spazi di Hausdorff

Def.: Uno spazio topologico X si dice di Hausdorff (o T_2) se

$$\forall x, y \in X \text{ con } x \neq y: \exists U \in \mathcal{I}(x), V \in \mathcal{I}(y) \mid U \cap V = \emptyset.$$



Oss.: Esistono $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ aperti con $x \in A \subseteq U$, $y \in B \subseteq V$, quindi A e B sono intorni ap. di x, y rispettivamente, disgiunti. Quindi nella def. possiamo anche assumere U, V intorni aperti.

Esempi: 1) Ogni spazio metrico è di Hausdorff, basta prendere U e V palle aperte di raggi abb. piccoli.

2) Se X ha topologia banale, allora dipende da $|X|$:

• se $|X| \leq 1$ allora X è T_2 ,

• se $|X| \geq 2$ allora X non è T_2 .

3) Se X ha topologia cofinita, allora di nuovo dipende da $|X|$:

• se $|X|$ è finita, la top. è discreta e X è T_2

• se $|X|$ è infinita allora due aperti non vuoti si intersecano sempre,

perciò X non è T_2 .

Lemma: Se uno sp. top. X è di Hausdorff, allora i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi (in particolare $\{x\}$ è chiuso $\forall x \in X$).

Dim.: Dim. che $\{x\}$ è chiuso; sia $y \in X \setminus \{x\}$, e scegliamo un intorno $V_y \in \mathcal{I}(y)$ che non contenga x (esiste grazie alla def. di T2). Poss. supporre V_y intorno aperto.

Allora $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$ quindi $\{x\}$ è chiuso.

Unioni finite di chiusi sono chiuse, da cui segue il lemma. \square

Proposizione: Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Dim.: Sia $Y \subseteq X$ sottosp. di X di Hausdorff, siano $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$.
Scegliamo $U \in \mathcal{I}(y)$, $U' \in \mathcal{I}(y')$ con $U \cap U' = \emptyset$, poss. supporre U e U' intorni aperti (in X). Allora

$y \in \overline{U \cap Y} = \overset{\text{aperto in } Y}{\text{intorno aperto di } y \text{ in } Y}$, $y' \in U' \cap Y = \text{intorno aperto di } y' \text{ in } Y$,

e $(U \cap Y) \cap (U' \cap Y) = \emptyset$, quindi Y è di Hausdorff.

Siano ora P, Q sp. top. di Hausdorff, dim. che $P \times Q$ è di H..

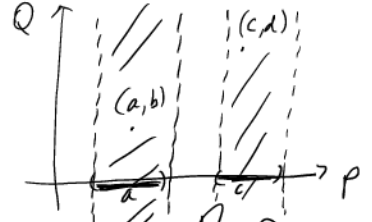
Siano $(a, b) \neq (c, d) \in P \times Q$, allora $a \neq c$ opp. $b \neq d$ (o entrambe le cose). Supp. $a \neq c$, scegliamo intorno aperti disgiunti U di a e V di c in P .

Allora

$(a, b) \in U \times Q =$ intorno aperto di (a, b) in $P \times Q$

$(c, d) \in V \times Q =$ ———— (c, d) ————

$$e \quad (U \times Q) \cap (V \times Q) = \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} \times Q = \emptyset.$$



Il ragionam. nel caso $a=c$ e $b \neq d$ è analogo, per cui $P \times Q$ è di Hausdorff.

□

Teorema: Sra X sp. topologico, consid. $X \times X$ con topologia prodotto e la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Vale:

X di Hausdorff $\iff \Delta$ è chiusa in $X \times X$.

Oss.: L'idea intuitiva del teorema è questa: immaginiamo un elem. $x \in X$ che "varia", ad es. un elem. di una successione. Supp. "tenda" a un elem. $a \in X$, il che intuitivamente vorrebbe dire che x "entra" progressivamente in tutti gli intorno di a . Se X è di Hausdorff, dato $b \neq a$ allora x non può "tendere" anche a b . Ma allora, nel prodotto $X \times X$, la coppia (x, x) che è

in Δ se "tende" a una coppia (a,b) deve valere per forza $a=b$,
 cioè intrinsecamente Δ è chiusa in $X \times X$.

Dim. del teorema : \Rightarrow Supp. X T2, dim. che $(X \times X) \setminus \Delta$ è

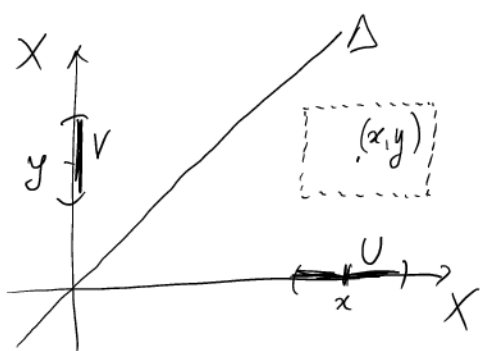
aperto, facendo vedere che è intorno di ogni suo punto. Sia

allora $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, quindi $x \neq y$. Scegliamo

intorni aperti disgiunti U di x e

V di y .

Allora $U \times V$ è aperto in



$X \times X$, contiene (x,y) , e non interseca la diagonale Δ perché

$U \cap V = \emptyset$. Segue: Δ chiusa in $X \times X$.

\Leftarrow Supp. Δ chiusa nel prodotto, siano $x,y \in X$ con $x \neq y$,

allora $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Essendo aperto, $(X \times X) \setminus \Delta$ è

unione di elem. della base $\{U \times V \mid U \subseteq X, V \subseteq X \text{ aperti}\}$.

Quindi esistono $U \subseteq X, V \subseteq X$ aperti tali che $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$

e $U \times V \ni (x,y)$. Allora $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$, e X è T2.

□

Corollario: Siano $f, g: X \rightarrow Y$ applicaz. continue fra spazi topologici.

Se Y è di Hausdorff allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X .

Dim.: Consid. l'applicazione $\varphi: X \rightarrow Y \times Y$, cioè quella che ha componenti
 $x \mapsto (f(x), g(x))$

f e g . Sappiamo che φ è continua, d'altronde $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$

è uguale a $\varphi^{-1}(\Delta)$ dove $\Delta \subseteq Y \times Y$ è la diagonale.

Per il teorema Δ è chiusa, da cui C è chiuso. □

Oss.: Data $f: X \rightarrow Y$ con Y di Hausdorff, e dato $y_0 \in Y$, l'insieme
 $\{x \in X \mid f(x) = y_0\}$ è chiuso in X , essendo la controimm. $f^{-1}(\{y_0\})$ e
 $\{y_0\}$ è chiuso in Y .

Spazi topologici connessi

Es.: \mathbb{R} con top. euclidea, $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ con top. di sottosp.

Intuitivamente X non è "connesso", perché è fatto da due "pezzi"
 $[0, 1]$ e $[2, 3]$. Il sottosp. $[0, \frac{1}{2}]$ è in X ma non è un
"pezzo" di X , perché è "attaccato" a $]\frac{1}{2}, 1]$.



Neppure $[0, 1] \cup [2, \frac{5}{2}]$: non è un "pezzo" di X .

Quali proprietà distinguono $[0, 1]$ e $[2, 3]$ dagli altri sottoinsiemi di X ?
Il fatto che sono entrambi contemporaneamente aperti e chiusi in X .

Def.: Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono solo \emptyset e X . Se X non è connesso si dice sconnesso.

Esempi: 1) Se $X = \emptyset$ è connesso, se $|X| = 1$ allora l'unica topologia possibile è $\{\emptyset, X\}$, e X è connesso. Anche se X ha cardinalità qualsiasi e top. banale è connesso.

2) Se $|X| \geq 2$ e X ha top. discreta allora X è sconnesso

3) $[0, 1] \cup [2, 3]$ dell'es. precedente è sconnesso.

4) Anche $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso, infatti

$] -\infty, 0[= X \cap] -\infty, 0[$ è aperto in X ma anche chiuso:

$] -\infty, 0[= X \cap] -\infty, 0]$.

5) \mathbb{Q} con top. di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su \mathbb{R} ; \mathbb{Q} è sconnesso.

Infatti $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ è chiuso in \mathbb{Q} , ma

è anche aperto perché $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} =]\sqrt{2}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{Q}$

Lemma: Sia X sp. topologico. Sono equivalenti:

- 1) X è sconnesso,
- 2) esistono aperti disgiunti non vuoti A_1, A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$,
- 3) esistono chiusi disgiunti non vuoti C_1, C_2 tali che $X = C_1 \cup C_2$.

Dim.: 1) \Rightarrow 2) Sia A_1 un sottos. aperto e chiuso con $A_1 \neq X$, $A_1 \neq \emptyset$. Allora A_1 e $A_2 = X \setminus A_1$ sono aperti disgiunti non vuoti con $X = A_1 \cup A_2$.

2) \Rightarrow 3) Abbiamo $A_2 = X \setminus A_1$ e $A_1 = X \setminus A_2$ quindi sono anche chiusi, basta porre $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$.

3) \Rightarrow 1) Vale $C_2 = X \setminus C_1$ quindi C_1 e C_2 sono anche aperti, e diversi sia da X sia da \emptyset .

□

Teorema: $[0, 1]$ (con top. euclidea) è connesso.

Dim.: Supp. per assurdo $X = [0, 1]$ sconnesso, e siano $C, D \subseteq X$ chiusi disgiunti non vuoti tali che $C \cup D = X$. Possiamo assumere $0 \in C$ (altrim. scambiamo C e D). Sia $d = \inf D$, e oss. che $d \in D$ perché D è chiuso. In particolare $d > 0$. L'insieme C contiene l'intervallo $[0, d[$, quindi contiene anche d perché C è chiuso; assurdo.

□

Lemma: Sia X sp. top., e sia $Y \subseteq X$ un sottosp. connesso.

Sia $A \subseteq X$ un sottos. aperto e chiuso. Allora $Y \subseteq A$

opp. $Y \cap A = \emptyset$.

Dim.: L'intersez. $Y \cap A$ è aperta e chiusa in Y , quindi è uguale a Y (e allora $Y \subseteq A$) oppure è uguale a \emptyset .

□

Definizione: Uno sp. top. X si dice connesso per archi se

$\forall p, q \in X \exists \alpha: [0, 1] \rightarrow X$ continua $\mid \alpha(0) = p, \alpha(1) = q$.

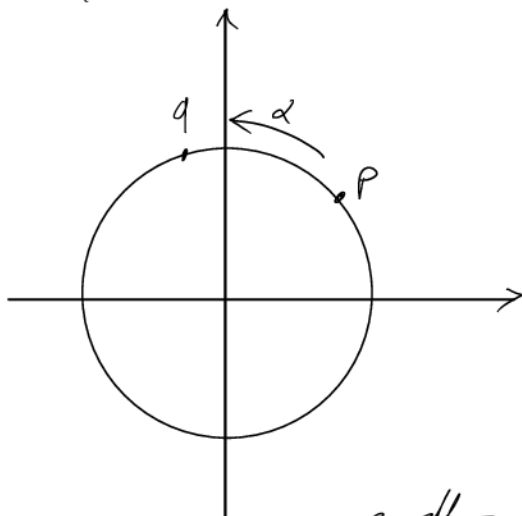
Una tale α si dice cammino da p a q .

Esempi: 1) \mathbb{R}^n è connesso per archi, basta prendere α che percorre il segmento da p a q .

2) $S^m = \{ p \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|p\| = 1 \}$ è connessa per archi.

Verifica: per $m=1$ è la circonferenza, dati due punti

$p, q \in S^1$ possiamo scriverli come



$$p = (\cos(r), \sin(r))$$

$$q = (\cos(s), \sin(s))$$

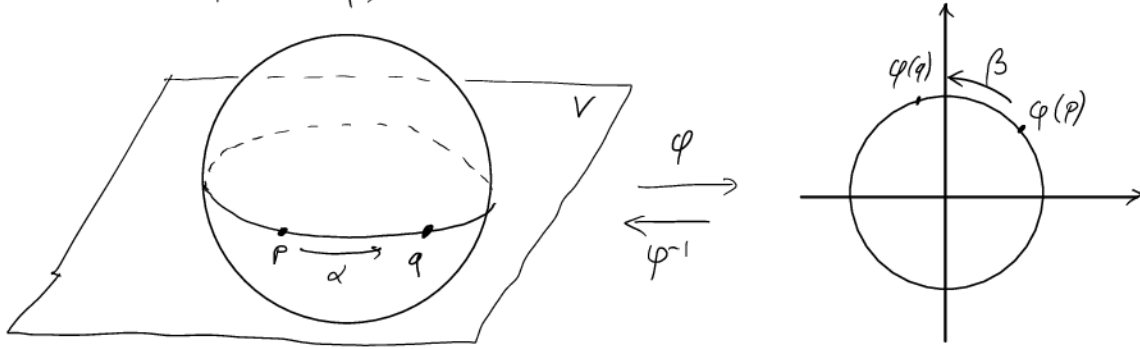
possiamo

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto (\cos((1-t)r + s), \sin((1-t)r + s))$$

e allora $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$.

Per $n > 1$, fissiamo $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un sottosp. vett. di dim. 2
 contenente p e q , e scegliamo $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'isomorfismo



lineare ortogonale (cioè che preserva il prod. scalare). Allora

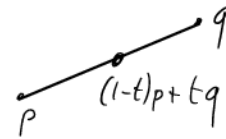
$\varphi(V \cap S^m) = S^1$; scegliamo $\beta: [0,1] \rightarrow S^1$ cammino da
 $\varphi(p)$ a $\varphi(q)$, poi basta porre $\alpha: [0,1] \rightarrow S^m$ con $\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta$.

3) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ (con topologia euclidea) con X convesso, cioè

$$\forall p, q \in X \quad \forall t \in [0,1]: (1-t)p + tq \in X.$$

Allora X è connesso per archi. Ad es.

se X è una palla aperta allora è convesso (facile,
 usando la div. triangolare) e quindi connesso per archi.



Teorema: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici.

1) Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.

2) Se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso
 per archi.

Dim.: 1) Supp. per assurdo $f(X)$ sconnesso, scriviamo come unione
 disgiunta di due aperti non vuoti $f(X) = A \cup B$.

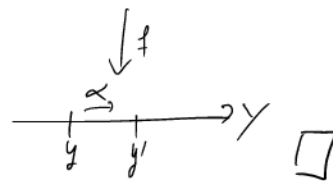
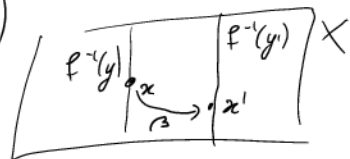
Allora $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, e questi sono due aperti
 disgiunti non vuoti. Segue X sconnesso: assurdo.

2) Siano $y, y' \in f(X)$, scegliamo $x \in f^{-1}(y)$, $x' \in f^{-1}(y')$

e $\beta: [0,1] \rightarrow X$ cammino da x a x' ;

poi poniamo $\alpha = f \circ \beta: [0,1] \rightarrow Y$.

α è continua e va da y a y' .

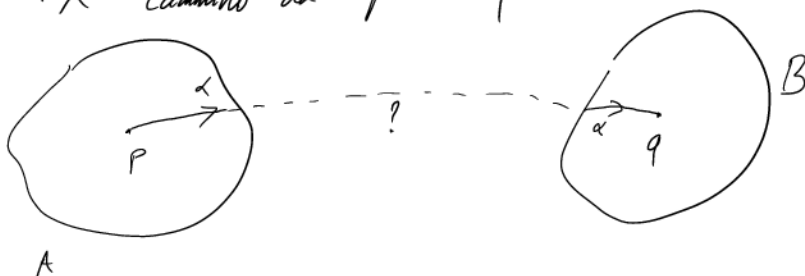


Corollario: Se X sp. top. è connesso per archi allora è connesso.

Dilu.: Per assurdo supponiamo X sconnesso, scriviamolo come unione

$X = A \cup B$ di aperti disgiunti non vuoti; scegliamo $p \in A$, $q \in B$, e

$\alpha: [0,1] \rightarrow X$ cammino da p a q



L'immagine $\alpha([0,1]) = Y$ è un sottosp. connesso di X , per il teorema e perché $[0,1]$ è connesso. Per un lemma precedente, abbiamo

$Y \subseteq A$: assurdo perché $q \in Y$, oppure

$Y \subseteq B$: —, — $p \in Y$.

Quindi X è connesso. □

Proposizione: Sia \mathbb{R} con top. euclidea e $I \subseteq \mathbb{R}$ con top. di sottospazio.

Sono equivalenti:

- 1) I è un intervallo*,
- 2) I è connesso per archi,
- 3) I è connesso.

(*: ricordiamo la def. di intervallo: I è tale se $\forall a < b \in I$: se $a < c < b$ allora $c \in I$.)

Dim.: 1) \Rightarrow 2) | Se I è un intervallo allora è convesso, quindi è connesso per archi.

2) \Rightarrow 3) | Segue dal corollario precedente.

3) \Rightarrow 1) | Supp. I connesso, e per assurdo I non un intervallo.

Allora $\exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid a, b \in I, c \notin I, a < c < b$, da cui

$$I = \underbrace{(-\infty, c[\cap I)}_{a \in \uparrow} \cup \underbrace{]c, +\infty[\cap I)}_{b \in \uparrow}$$

cioè I è unione di aperti disgiunti non vuoti: assurdo. \square

Oss.: La connessione e la connessione per archi si possono usare per dim. che due sp. top. non sono omeomorfi: se uno è connesso e l'altro no allora non possono essere omeomorfi! Analogamente si usa la connessione per archi.

Esempio: L'osservazione si può usare anche in modo più elaborato, ad esempio si può usare la connessione per dim. che $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi, anche se sono entrambi connessi! (V. fogli settimanali di esercizi.)

La connessione per spazi topologici ha molte applicazioni; vediamo una.

Lemma: Sia $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, $m \geq 1$ (S^m e \mathbb{R} con top. euclidea).

Esiste $p_0 \in S^m$ tale che $f(p_0) = f(-p_0)$.

(« Ci sono sempre due punti antipodali sulla Terra dove c'è la stessa temperatura. »)

Dim.: Consid. $g: S^m \rightarrow \mathbb{R}$. È una funzione continua,
 $p \mapsto f(p) - f(-p)$

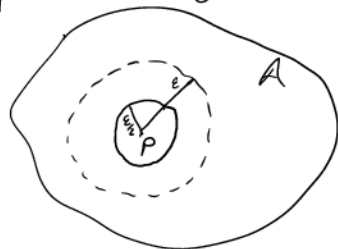
e per qualsiasi $p \in S^m$ vale $g(-p) = -g(p)$. Quindi
l'immagine di g contiene due numeri opposti, $g(p)$ e $-g(p)$. Ma
 S^m è connessa per archi, quindi $\text{Im}(g)$ è connessa per archi; cioè
è un intervallo. Quindi deve contenere 0, cioè c'è $p_0 \in S^m$ t.c. $g(p_0) = 0$.

Corollario (invarianza del dominio con $m=1$, in qualsiasi): Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$
un aperto in topologia euclidea con $m > 1$ (ad es. $A = \mathbb{R}^m$).
Allora A non è omeomorfo a \mathbb{R} . □

Dim.: Poss. supporre $A \neq \emptyset$, sia $p \in A$, scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(p) \subseteq A.$$

$$\text{Allora } S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-p\| = \varepsilon/2\}$$



è tutto contenuto in A , ed è omeomorfo a S^{m-1} (basta traslare
il centro nell'origine e riscalare per avere raggio = 1).

Supp. per assurdo esista un omeom. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, la restrizione
 $f|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e iniettiva; contraddice il Lemma
precedente, assurdo. □

Vediamo altri risultati generali che assicurano che certi spazi siano connessi.

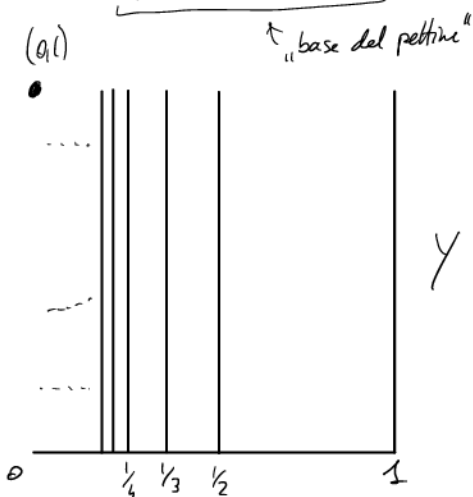
Proposizione: Sia X sp. top., $Y \subseteq X$ sottospazio connesso, denotiamo con \bar{Y} la chiusura di Y in X . Sia $W \subseteq X$ con $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$. Allora W è connesso. (In particolare, \bar{Y} stesso è connesso.)

Dim.: Sia $Z \subseteq W$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in W . Allora $Z \cap Y$ è aperto e chiuso in Y (infatti se $A \subseteq X$ è aperto in X con $Z = A \cap W$, allora $Z \cap Y = A \cap \underbrace{W \cap Y}_Y = A \cap Y$ quindi $Z \cap Y$ è ap. di Y ; analogam. è anche chiuso in Y). Inoltre Y è denso in W , perché la sua chiusura in W è uguale a $\underbrace{\bar{Y} \cap W}_{\leftarrow \text{chiusura in } X}$ (lemma visto nella sezione sottospazi), e $\bar{Y} \cap W = W$. Allora Y interseca tutti gli ap. non vuoti di W , e quindi $Z \cap Y \neq \emptyset$. Ma Y è connesso e $Z \cap Y$ è aperto e chiuso: segue $Z \cap Y = Y$, cioè $Z \supseteq Y$. Infine Z è chiuso in W e contiene Y che è denso in W : segue $Z = W$. \square

Esempio: La prop. ci permette di costruire un esempio di spazio top. connesso ma non connesso per archi: il pettine con la pulce.

Sia Y il seguente sottoins. di \mathbb{R}^2 :

$$Y = \underbrace{([0,1] \times \{0\})}_{\text{"base del pettine"}} \cup \underbrace{\left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in [0,1] \right\}}_{\text{"denti del pettine"}}$$



e poniamo

$$X = Y \cup \underbrace{\{(0,1)\}}_{\text{"la pulce"}}$$

Osserviamo che $(0,1)$ è aderente a Y in \mathbb{R}^2 , ad es. è limite della successione $(\frac{1}{n}, 1)$ fatta di punti di Y . Inoltre Y è chiaramente connesso per archi, è facile connettere due punti qualsiasi (sulla base, o sui "denti" del pettine) con un cammino qualsiasi. Quindi Y è connesso, e la proposizione implica che X è connesso perché $Y \subseteq X \subseteq \bar{Y}$.
↑ chiusura in \mathbb{R}^2

Però X non è connesso per archi: non c'è alcun cammino (continuo) da $(0,1)$ a un qualsiasi punto di Y (v. fogli di esercizi).

Sappiamo che l'immagine di un connesso è connessa, ma la controimmagine di un connesso non è necessariamente connessa (es. $\{\text{due punti in } \mathbb{R}^n\} \rightarrow \{\text{1 punto}\}$).

Però è connessa se aggiungiamo ipotesi:

Proposizione: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici, sup. che sia suriettiva. Se valgono:

- 1) Y è connesso,
- 2) $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y \in Y$,
- 3) f aperta, oppure chiusa,

allora X è connesso.

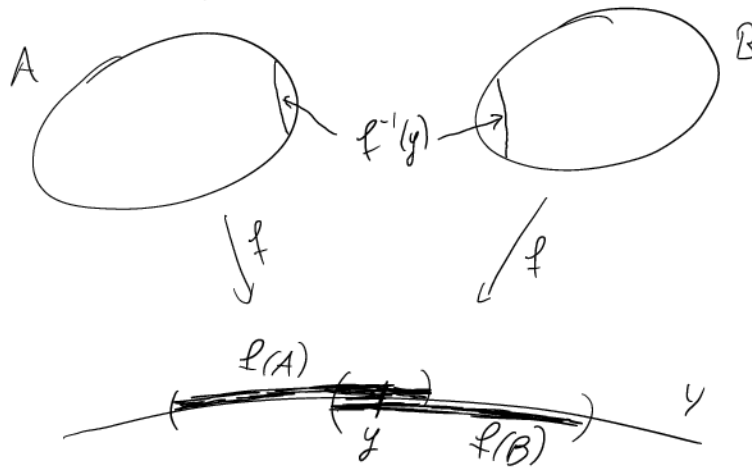
Oss.: L'ipotesi 3) è necessaria, ad es. $f: [0,1] \cup]2,3] \rightarrow [0,2]$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

è continua e suriettiva, soddisfa 1) e 2), ma il dominio è sconnesso.

Dm.: Supp. f aperta, e per assurdo X sconnesso. Scriviamo

$X = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti. Le immagini $f(A), f(B)$ sono aperte, non vuote, e vale $Y = f(X) = f(A) \cup f(B)$.
 Visto che Y è connesso, dev'esserci un $y \in f(A) \cap f(B)$.



Cioè $f^{-1}(y)$ interseca A e anche B . Ma $f^{-1}(y)$ è connesso, e A è ap. e chiuso in X , per cui $f^{-1}(y)$ dev'essere tutto in A oppure tutto in $B = X \setminus A$: assurdo. Quindi X è connesso.

Il ragionam. con f chiusa è analogo, osservando che A e B sono anche chiusi. □

Teorema: Il prodotto di sp. topologici connessi è connesso. Il prodotto di due sp. top. connessi per archi è connesso per archi.

Dim. Connessione: siano P, Q connessi, e consid. la proiezz.

$p: P \times Q \rightarrow P$. È continua, aperta, suriettiva, e la controimmagine di un qualsiasi $x \in P$ è uguale a $\{x\} \times Q$, che è omeomorfo a Q e quindi connesso.

Per la proposizione, $P \times Q$ è connesso.

Comessione per archi: esercizio.

□

Def: Sia X sp. topologico. Se $C \subseteq X$ è un sottoinsieme connesso e massimale rispetto a questa proprietà, allora C si dice componente connessa di X . Analogam. si definiscono le componenti connesse per archi.

Oss.: 1) Le componenti connesse sono chiuse, perché "la chiusura di un connesso è connessa" (chiusura intesa nello sp. ambiente). Però non è vero che siano anche sempre aperte!

2) È facile dimostrare che le comp. connesse sono tutte disgiunte, perché l'unione di due connessi che si intersecano è connessa (v. fogli settiman. di exerc.). Analogamente per le comp. connesse per archi. Segue facilmente che uno spazio top. qualsiasi è unione disgiunta delle sue comp. connesse, ed è unione disgiunta delle sue comp. connesse per archi.

Esempio: In top. euclidea, qualsiasi sottoins. di \mathbb{Q} con almeno 2 punti è sconnesso (v. fogli di exerc. settimanali). Quindi le componenti connesse di \mathbb{Q} sono solo singoli punti. Osserviamo che sono chiuse, ma in questo caso non aperte.

Spazi topologici compatti

Def.: Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1) \mathcal{R} si dice ricoprimento di X se $\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A = X$, si dice

ricoprimento aperto se vale anche che A è aperto $\forall A \in \mathcal{R}$.

2) Se $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un ricoprimento e $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, allora \mathcal{R}' si dice sottoricoprimento di \mathcal{R} .

Def.: Uno sp. topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito.

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea;

$$\mathcal{R} = \left\{]-\infty, 1[,]-1, +\infty[,]-1, 1[,]-2, 2[, \dots,]-m, m[, \dots \right\}$$

è un ricopr. infinito di X , che ammette il sottoricoprimento

$$\mathcal{R}' = \left\{]-\infty, 1[,]-1, +\infty[\right\}. \quad \text{Ma } \tilde{\mathcal{R}} = \left\{]-m, m[\mid m \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

è un ricopr. aperto che non ha sottoricoprimenti finiti. Dunque

X non è compatto.

2) Se X è finito, con qualsiasi topologia, allora è compatto perché ogni ricopr. è finito. Se X ha cardinalità qualsiasi ma topologia banale allora è compatto.

3) Se X è infinito con top. discreta, allora non è compatto, perché

$\mathcal{Q} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricopr. finiti.

Teorema: $[0, 1]$ (con top. euclidea) è compatto.

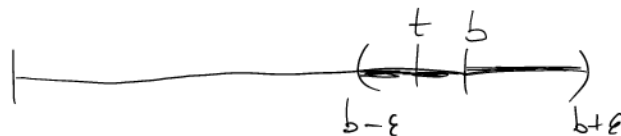
Dm.: Sia \mathcal{R} ricopr. aperto, per ogni $A \in \mathcal{R}$ scegliamo $A' \subseteq \mathbb{R}$ aperto in \mathbb{R} tale che $[0, 1] \cap A' = A$, e poniamo

$$\mathcal{S} = \{ A' \mid A \in \mathcal{R} \}$$

È una famiglia di aperti di \mathbb{R} , e la sua unione contiene $[0, 1]$.

Poniamo $Y = \{ t \in [0, 1] \mid \text{esiste una sottofamiglia finita di } \mathcal{S} \text{ la cui unione contiene } [0, t] \}$, e sia $b = \sup Y$.

Dm. che $b \in Y$: scegliamo $A'_0 \in \mathcal{S}$ t.c. $b \in A'_0$, e $\varepsilon > 0$ t.c. $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\subseteq A'_0$. C'è un $t \in Y \cap]b - \varepsilon, b]$,



scegliamo A'_1, \dots, A'_m tali che $A'_1 \cup \dots \cup A'_m \supseteq [0, t]$,
allora $A'_0 \cup A'_1 \cup \dots \cup A'_m \supseteq [0, b]$, quindi $b \in Y$.

Dim. che $b=1$: per assurdo sia $b < 1$, scegliamo A'_0, ε ,

A'_1, \dots, A'_m ma con la richiesta aggiuntiva che $b + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1$.

Come prima vale

$A'_0 \cup \dots \cup A'_m \supseteq [0, b]$, ma vale anche

$A'_0 \cup \dots \cup A'_m \supseteq [0, b + \frac{\varepsilon}{2}]$, per cui $b + \frac{\varepsilon}{2} \in Y$ e

b non può essere il \sup di Y : assurdo.

Quindi esiste una sottofam. ^{finita} di \mathcal{J} che ricopre $[0, 1]$, e allora \mathbb{R} ammette un sottoric. finito.

□

Oss.: Come la connessione, anche la compattezza si può usare per dim. che due spazi topologici non sono omeomorfi. Ad es. ora sappiamo che \mathbb{R} e $[0, 1]$ (con top. euclidea) non sono omeomorfi, perché $[0, 1]$ è compatto e \mathbb{R} no.

2) C'è una correlazione fra essere un sottosp. compatto di uno sp. topologico "ambiente", ed essere un sottospazio chiuso nello sp. ambiente:

Proposizione: Sia $Y \subseteq X$ sottosp. di uno spazio topologico.

1) Se X è compatto e Y è chiuso in X , allora Y è compatto.

2) Se X è T_2 e Y è compatto, allora Y è chiuso in X .

Oss.: Attenzione: le ipotesi aggiuntive " X compatto " e " X T_2 " sono necessarie, infatti ad es.

- $[0, +\infty[$ è chiuso in \mathbb{R} ma non è compatto
- sia $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$ e topologia bande, allora $Y = \{a\}$ è compatto (perché è finito, ad es.) ma non è chiuso.

Dim. della prop.: 1) Sia \mathcal{R} ricoprimento aperto di Y , per ogni $A \in \mathcal{R}$

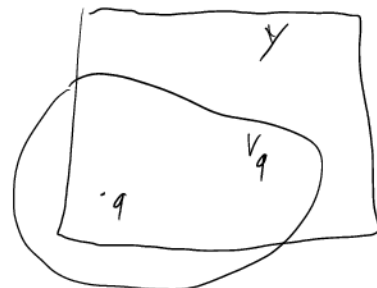
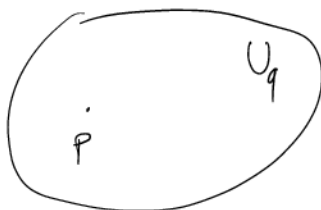
scegliamo $A' \in X$ ap. di X t.c. $A' \cap Y = A$. La famiglia $\mathcal{S} = \{A' \mid A \in \mathcal{R}\}$ è una fam. di aperti (di X), la cui unione contiene Y . La famiglia $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{X \setminus Y\}$ è un ricoprimento di X , possiamo estrarne un sottoricoprimento finito. Cioè esistono

$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$A'_1 \cup \dots \cup A'_m \cup \underbrace{X \setminus Y}_{\substack{\text{eventualm. superfluo,} \\ \text{ma non importa}}} = X$$

Allora $\{A_1, \dots, A_m\}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{R} , per cui Y è compatto.

2) Dim. che $X \setminus Y$ è aperto; sia $p \in X \setminus Y$, per ogni $q \in Y$ scegliamo $U_q \in \mathcal{I}(p)$, $V_q \in \mathcal{I}(q)$ tali che $U_q \cap V_q = \emptyset$, possiamo supporre U_q, V_q aperti.



Allora $\{V_q \cap Y \mid q \in Y\}$ è un ricoprimento aperto di Y ,
 estraiamo un sottoricoprimento finito, cioè scegliamo $q_1, \dots, q_m \in Y$ t.c.

$$Y = (V_{q_1} \cap Y) \cup \dots \cup (V_{q_m} \cap Y)$$

Allora $Y \subseteq V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_m}$, e allora $U = U_{q_1} \cap \dots \cap U_{q_m}$ non interseca Y
 (perché $U_{q_i} \cap V_{q_i} = \emptyset \forall i$). Ma U è aperto, quindi è un intorno di p
 tutto cont. in $X \setminus Y$, che allora è aperto perché è intorno di ogni suo punto.

□

Corollario: Sia $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, sia $Y \subseteq X$ sottospazio.

Y è compatto $\iff Y$ è chiuso (in X) e limitato.

Dim.: \implies X è T_2 , quindi se Y è compatto è chiuso in X .

Inoltre se per assurdo Y compatto non è limitato, allora non si può
 estrarre alcun sottoric. finito dal ricoprimento

$$\mathcal{R} = \{]-m, m[\cap Y \mid m \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

di Y : assurdo. Quindi Y è anche limitato.

\impliedby Sia $Y \subseteq X$ chiuso e limitato. Allora esiste $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che
 $Y \subseteq [-m, m]$, e questo intervallo è compatto perché è omeomorfo a
 $[0, 1]$. Inoltre Y è chiuso in X e segue facilmente che Y è
 chiuso anche in $[-m, m]$. Essendo chiuso in un compatto, Y è
 compatto.

□ 69

Studiamo ora come si comporta la compattezza con le applicazioni continue.

Teorema: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra sp. topologici. Se X è compatto anche $f(X)$ è compatto.

Dim.: Sia \mathcal{R} ricopr. aperto di $f(X)$, poniamo

$\tilde{\mathcal{R}} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{R}\}$. Sappiamo che anche $\tilde{f}: X \rightarrow f(X)$ è
 $x \mapsto f(x)$

continua, perciò $\tilde{\mathcal{R}}$ è un ric. aperto di X . Estraiamo un sottoric. finito

$\tilde{\mathcal{R}}' = \{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_m)\}$ di $\tilde{\mathcal{R}}$, e consid.

$\mathcal{R}' = \{A_1, \dots, A_m\}$: è un sottoricopr. finito di \mathcal{R} , per cui $f(X)$ è compatto.

□

Corollario: Stano X sp. top., \mathbb{R} con top. euclidea, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f ha minimo e massimo.

Dim.: $f(X)$ è compatto, quindi è limitato (\Rightarrow inf e sup sono finiti) e chiuso (\Rightarrow inf e sup sono min e max rispettivamente).

□

Corollario: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è chiusa.

Dim.: Sia $C \subseteq X$ chiuso, allora è compatto, e $f(C)$ è compatto ed è dentro Y che è T_2 , quindi $f(C)$ è chiuso in Y .

□

Questo ci permette di dimostrare un fatto utilissimo per verificare facilmente in tanti esempi che certe applicazioni sono omeomorfismi.

Corollario: Sia $f: X \rightarrow Y$ applicaz. continua fra spazi topologici, supp. f biettiva, X compatto, Y di Hausdorff. Allora f è un omeomorfismo.

Dim.: f è chiusa per il lemma, quindi è un omeom. (v. fogli di esercizi settimanali).

□

Oss.: Come per la connessione, la controimmagine di un compatto non è sempre compatta, ad es. $\mathbb{R} \rightarrow \{pt\}$. Però lo è sotto alcune ipotesi aggiuntive:

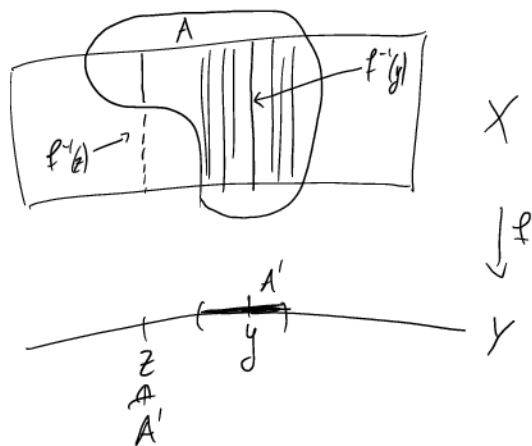
Proposizione: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra sp. top., supp. sia suriettiva. Se valgono:

- 1) Y compatto,
- 2) $f^{-1}(y)$ compatto $\forall y \in Y$,

3) f chiusa,
allora X è compatto.

Oss.: Qui non andrebbe bene supporre f aperta invece che chiusa (v. fogli settimanali di esercizi).

Dim.: Introduciamo per comodità la seguente notazione: dato $A \subseteq X$ aperto, denotiamo $A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$.



L'insieme A' è aperto in Y , perché:

$$Y \setminus A' = \{z \in Y \mid f^{-1}(z) \not\subseteq A\} = \{z \in Y \mid f^{-1}(z) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

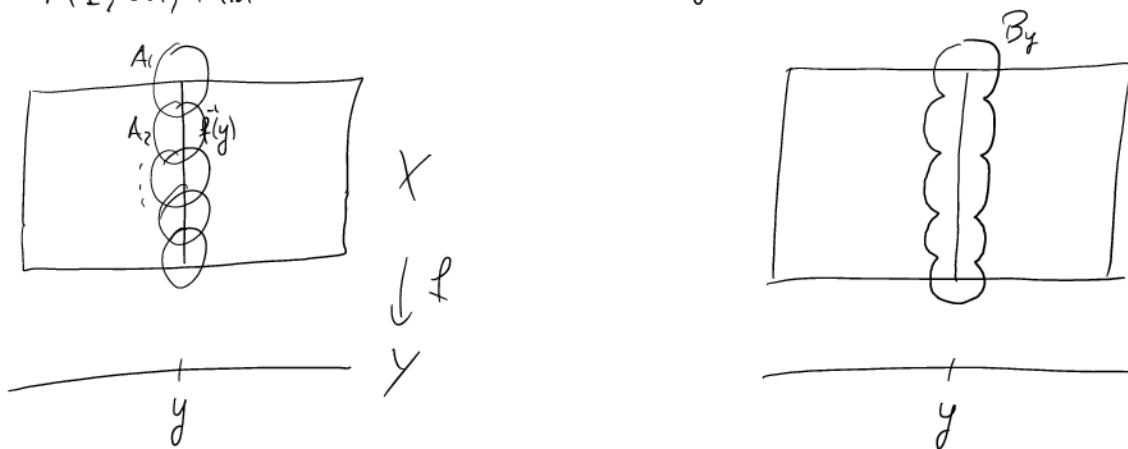
$$= \{z \in Y \mid \exists x \in X \setminus A \mid f(x) = z\} = f(X \setminus A)$$

$\bar{}$ è chiuso in Y , visto che A è aperto in X e f è chiusa.

Sia ora \mathcal{R} ricoprimento aperto di X .

Sia $y \in Y$, consid. $f^{-1}(y)$: è compatto, quindi esistono

$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ tali che $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m$:



Unendoli ottengo $B_y = A_1 \cup \dots \cup A_m$, un elem. di \mathcal{R}_0 tale che

$B'_y \ni y$ (infatti $f^{-1}(y) \subseteq B_y$).

Segue che la famiglia $\{B'_y \mid y \in Y\}$ è un ricopr. aperto di Y : estraiamone un sottoricopr. finito, cioè scegliamo

$y_1, \dots, y_m \in Y$ t.c. $B'_{y_1} \cup \dots \cup B'_{y_m} = Y$.

Ma allora $B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_m} = X$, e ciascun B_{y_i} è unione

finita di elem. di \mathcal{R} . Mettendoli insieme per ogni i abb.

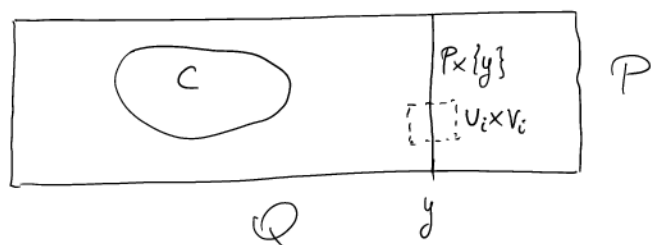
trovato un sottocoprimento finito di \mathcal{R} , quindi X è compatto.

□

Proposizione: Siano P, Q spazi topologici. Se P è compatto, la proiezione $q: P \times Q \rightarrow Q$ è chiusa.

Oss.: Nella proposizione vale in realtà "se e solo se", cioè se P è uno sp. top. t.c. la proiezione $q: P \times Q \rightarrow Q$ è chiusa $\forall Q$ sp. top., allora P è compatto (v. fogli di esercizi).

Dim. (del corollario): Sia $C \subseteq P \times Q$ chiuso, dimostriamo che $Q \setminus p(C)$ è intorno di ciascun suo punto. Sia $y \in Q \setminus q(C)$,



osserviamo che $P \times \{y\}$ è compatto perché è omeomorfo a P .

Scriviamo l'aperto $(P \times Q) \setminus C$ come unione, usando la solita base:

$$(P \times Q) \setminus C = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \quad \text{con } U_i \subseteq P, V_i \subseteq Q \text{ aperti.}$$

Ne esiste un numero finito che ricopre tutto $P \times \{y\}$, siano allora i_1, \dots, i_m tali che

$$(U_{i_1} \times V_{i_1}) \cup \dots \cup (U_{i_m} \times V_{i_m}) \supseteq P \times \{y\}. \quad \text{Osserviamo che}$$

$$(P \times Q \setminus C) \supseteq U \times V \supseteq P \times \{y\} \quad \text{ponendo } U = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}, \quad V = V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_m},$$

e segue $y \in V \subseteq Q \setminus p(C)$, quindi $p(C)$ è chiuso. \square

Oss.: La dim. è simile a quella che un compatto in un T_2 è chiuso. In effetti esiste una dimostrazione simile ma un po' più generale, che implica entrambe (v. teo. di Wallace sul libro di Manetti).

Corollario: Se P e Q sono compatti allora $P \times Q$ è compatto.

Dim.: Usiamo la proiezione $q: P \times Q \rightarrow Q$: è chiusa, il codominio è compatto, e le controimmagini dei punti di Q sono compatte perché omeomorfe a P . Segue: il dominio $P \times Q$ è compatto. \square

Esempio: $[0, 1]^m$ con $m \geq 1$ è compatto, grazie all'ultimo corollario.

Identificazioni

Def.: Un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ fra spazi topologici si dice identificazione se:

1) f è continua e suriettiva

2) un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se

$f^{-1}(A)$ è aperto in X .

Oss.: Se f è un'identificazione, allora la topologia su Y è univocam. determinata da f e dalla topologia su X .

Lemma: Sia $f: X \rightarrow Y$ applicaz. continua fra spazi topologici.

1) Se f è suriettiva e aperta, allora è un'identificazione.

2) Se f è suriettiva e chiusa, allora è un'identificazione.

Dim.: 1) Supp. f suriettiva e aperta. Sia $A \subseteq Y$: se A è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Viceversa, supponiamo che $f^{-1}(A)$ sia aperto e dim. che A è aperto.

Vale $A = f(f^{-1}(A))$ perché f è suriettiva (ricordiamo che in generale vale $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$). Quindi A è aperto perché f è aperta.

2) Esercizio.

□

Esempi: 1) Se f è un omeomorfismo allora è un'identificazione.

2) Le proiezioni $p: P \times Q \rightarrow P$ e $q: P \times Q \rightarrow Q$ sono identificazioni.

$$3) f: [0, 1] \rightarrow S^1 \quad \text{è chiusa, suriettiva e continua,}$$

$$t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

quindi è un'identificazione. Dimostriamo che \bar{e} è chiusa: \bar{e} un'applicaz.

continua da un compatto in un T_2 , quindi è chiusa.

Osserviamo che non è aperta: l'immagine di $[0, \frac{1}{2}[$, che è aperto in $[0, 1]$, non è aperta in S^1 .

Lemma (proprietà universale delle identificazioni): Sia $f: X \rightarrow Y$ identificazione fra

sp. topologici, sia Z uno sp. top. e $g: X \rightarrow Z$ continua. Supp.

g sia costante sulle fibres (= controimmagini) di f , cioè $\forall x, x' \in X$:

se $f(x) = f(x')$ allora $g(x) = g(x')$. Allora esiste un'unica appl.

continua $h: Y \rightarrow Z$ tale che $g = h \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow f & \dashrightarrow & \\ Y & \dashrightarrow \exists! h & \end{array}$$

Dim.: Definiamo $h: Y \rightarrow Z$: dato $y \in Y$ scegliamo $x \in f^{-1}(y)$ e poniamo $h(y) = g(x)$. Questo è ben definito grazie alle ipotesi su g , inoltre è l'unica definizione possibile per cui valga $g = h \circ f$. Questo assicura l'unicità di h .

Rimane da dim. che h è continua, sia $A \subseteq Z$ aperto.

Sappiamo che $g^{-1}(A)$ è aperto, inoltre vale

$$g^{-1}(A) = f^{-1}(h^{-1}(A))$$

Visto che f è un'identificazione, deduciamo che $h^{-1}(A)$ è aperto, per cui h è continua.

Osservazione: Data $f: X \rightarrow Y$ identificazione, sia $A \subseteq X$ aperto saturo cioè $\forall a \in A \forall b \in X: \text{se } f(a) = f(b) \text{ allora } b \in A$. In questo caso $A = f^{-1}(f(A))$, per cui $f(A)$ è aperta. Cioè tramite un'identificazione le immagini degli aperti saturo sono aperte.

Topologia quoziente

Definizione: Siano X uno sp. topologico, Y un insieme, $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva. La famiglia

$$\{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \}$$

è una topologia su Y , detta topologia quoziente (indotta da f).

Esercizio: Verificare che la famiglia definita prima è effettivamente una topologia su Y .

Oss.: 1) Con la topologia quoziente su Y , f è continua e anche un'identificazione. Inoltre:

- La topologia quoziente è l'unica possibile su Y che rende f un'identific.
- La top. quoziente è la più fine che rende f continua.

2) Viceversa, se Y ha già una topologia ed f è un'identificazione, allora la topologia su Y coincide con la topologia quoziente.

Esempi: 1) Sia X sp. topologico, e \sim una rel. d'equivalenza su X .

Allora è definito il quoziente X/\sim come l'insieme delle classi di equivalenza (denotate come $[x]$ = classe d'eq. che contiene $x \in X$)

e l'applicazione suriettiva

$$\pi: X \longrightarrow X/\sim$$
$$x \longmapsto [x]$$

In questo caso si mette su X/\sim di solito la topologia quoziente indotta da π .

2) Consideriamo $X = [0, 1]$ con rel. d'equivalenza \sim definita come

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x=y & \text{oppure} \\ x, y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Cioè le classi di equivalenza sono $[0] = [1] = \{0, 1\}$, e $[t] = \{t\}$

$\forall t \in]0, 1[$.

Il quoziente X/\sim "appiccica" i punti 0 e 1, lasciando gli altri invariati. Verifichiamo che X/\sim è omeomorfo a S^1 . Usiamo l'app. già vista, chiamandola stavolta g :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\xrightarrow{g} S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Confrontiamola con la proiezione $\pi: [0, 1] \longrightarrow \frac{[0, 1]}{\sim}$

$$x \longmapsto [x]$$

Vale: π è un'identificazione, e g è costante sulle fibre di π ,

perché $g(0) = g(1)$. Allora g «passa al quoziente», cioè esiste $h: \frac{[0,1]}{\sim} \rightarrow S^1$ continua t.c. $g = h \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow \pi & \nearrow h & \\ \frac{[0,1]}{\sim} & & \end{array} \quad \text{oss.: } h([x]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

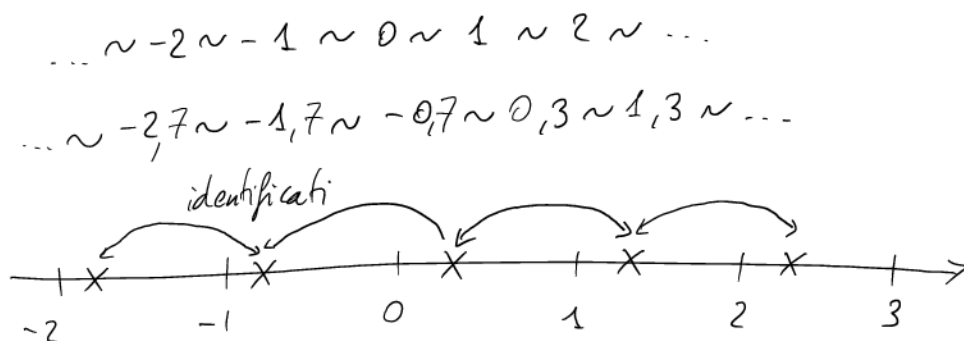
Ora h è iniettiva, perché ad ogni punto \checkmark di $\frac{[0,1]}{\sim} \setminus \{[0]\}$ corrisponde un solo $z \in]0,1[$, che individua un punto di S^1 e su questi z l'app. g è iniettiva. Poi il punto $[0]$ va in $(1, 0) \in S^1$, che è diverso da $g(z) \forall z \in]0,1[$.

Inoltre h è suriettiva, perché g è suriettiva.

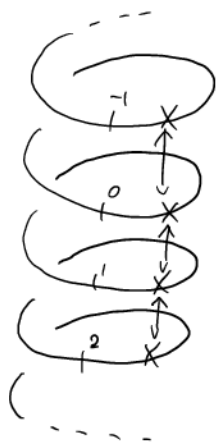
Infine: $[0,1]$ è compatto, allora la sua immagine $\frac{[0,1]}{\sim}$ è compatto, e S^1 è T2: segue che h è un omeomorfismo.

3) Una costruzione analoga alla precedente è questa:

sia $X = \mathbb{R}$, e \sim rel. d'eq. data da $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Cioè stiamo identificando tutti i punti di \mathbb{R} che si trovano a distanza intera l'uno dall'altro:



Possiamo visualizzarlo meglio immaginando \mathbb{R} avvolto a spirale:



Otteniamo intuitivamente

$$\mathbb{R}/\sim = S^1$$

Effettivamente anche \mathbb{R}/\sim è omeomorfo a S^1 , e si dimostra come prima usando stavolta

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Anche qui g passa al quoziente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow \pi & & \nearrow h \\ \mathbb{R}/\sim & & \end{array}$$

e h è continua, biettiva, S^1 è T_2 . Di nuovo

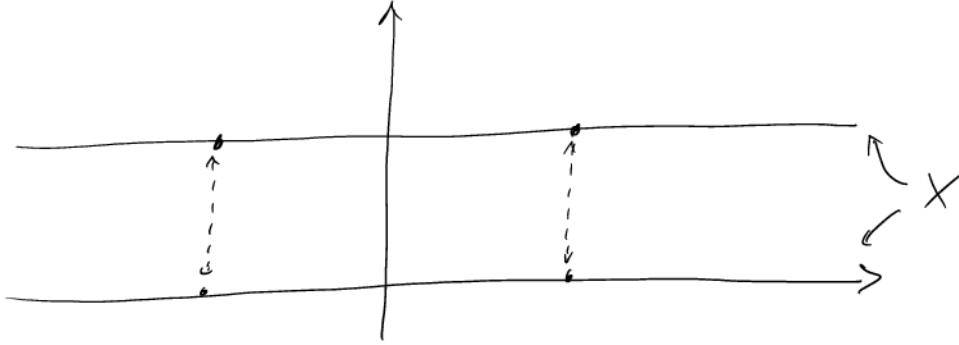
\mathbb{R}/\sim è compatto, ma stavolta si dimostra osservando che

$$\mathbb{R}/\sim = \pi([0, 1]).$$

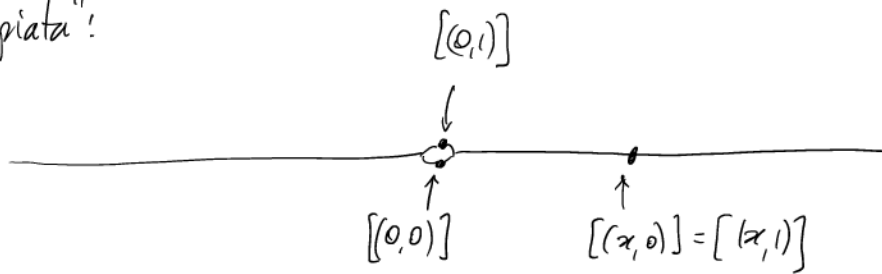
4) In \mathbb{R}^2 prendiamo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ (= l'unione di due rette orizzontali). Poniamo per $(x, y), (x', y') \in X$:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') & \text{oppure} \\ x = x' \neq 0 & \text{(con qualsiasi } y, y') \end{cases}$$

Quindi abbiamo $(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, ma $(0, 0) \not\sim (0, 1)$:



Allora X/\sim è una sola copia di \mathbb{R} , ma con l'origine "raddoppiata":



Qui X/\sim non è T2, perché $[0, 1]$ e $[0, 0]$ non ammettono intorno disgiunti (esercizio).

5) Un modo usuale di costruire quozienti è il seguente. Dato X sp. top., si considera un sottoinsieme $Y \subseteq X$ (qualsiasi), e si definisce la rel. d'equivalenza \sim_Y come:

$$x \sim_Y x' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' & \text{opp.} \\ x, x' \in Y \end{cases}$$

Le classi d'equival. sono: una sola per tutti gli elem. di Y , cioè $Y = [y] \quad \forall y \in Y$, e poi tante altre classi $[z] = \{z\}$ una

per ogni $z \in X \setminus Y$. Lo spazio topologico X/Y è ottenuto intuitivamente "contraendo Y a un singolo punto", si denota anche con X/Y .

Un modo anche usuale di costruire quozienti è usando azioni di gruppi:

Def.: Sia X sp. topologico, definiamo $\text{Omeo}(X) = \{f: X \rightarrow X \text{ omeomorfismo}\}$.

Osserviamo che $\text{Omeo}(X)$ è un gruppo, con operazione \circ = la composizione, ed elemento neutro l'identità $\text{id}_X: X \rightarrow X$. Sia ora $G \subseteq \text{Omeo}(X)$ un sottogruppo; allora è definita la relaz. d'equivalenza

$$x \sim y \iff \exists g \in G \mid g(x) = y \quad \left(\begin{array}{l} \text{le classi di equivalenza} \\ \text{sono le } \underline{\text{orbite}} \text{ di } G \text{ su } X \end{array} \right)$$

$(x, y \in X)$

e si denota X/\sim anche come X/G .

Esempio: L'esempio con $X = \mathbb{R}$ e $x \sim x + m \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$ si può anche ottenere come X/G , basta prendere $\forall m \in \mathbb{Z}$ l'omeom.

$$f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e il gruppo } G = \{f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \mapsto x + m$$

infatti $f_m \circ f_n = f_{m+n}, \quad f_m^{-1} = f_{-m}$.

Proposizione: Siano X uno sp. top. e G un sottogr. di $\text{Omeo}(X)$.

L'applicazione naturale $\pi: X \rightarrow X/G$ è aperta.

$$x \mapsto [x]$$

Inoltre se G è finito π è anche chiusa.

Dim.: Sia $A \subseteq X$ aperto, ricordiamo che $\pi(A)$ è aperto in X/G se e solo se $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(A)\} = \\ &= \{x \in X \mid \exists a \in A \mid [x] = [a]\} = \{x \in X \mid \exists a \in A \exists g \in G \mid \\ &g(x) = a\} = \{x \in X \mid \exists g \in G \mid g(x) \in A\} = \\ &= \bigcup_{h \in G} h(A) \end{aligned}$$

infatti se $g(x) \in A$ allora
 $g^{-1}(g(x)) \in g^{-1}(A)$ cioè
 $x \in g^{-1}(A)$

Visto che A è aperto e gli elem. di G sono omeom. $X \rightarrow X$, l'insieme $h(A)$ è aperto $\forall h \in G$, quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto, e $\pi(A)$ è aperto.

Sia ora G finito e $C \subseteq X$ chiuso, abb. $\pi(C)$ chiuso se e solo se $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso, e vale:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{h \in G} h(C) \quad \text{è chiuso.}$$

↑ unione finita ↑ chiuso

□

Come nell'esempio di \mathbb{R} con l'origine "raddoppiata", talvolta X è T_2 ma X/\sim no, ed è spesso utile determinare se X/\sim lo è oppure no.

Con X/G c'è un teorema utile per questo.

Teorema: Siano X sp. top. e G sottogr. di $\text{Omeo}(X)$. Supp. X di Hausdorff. Il quoziente X/G è di Hausdorff se e solo se $D = \{ (x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X, g \in G \}$ è chiuso in $X \times X$.

Dim.: Ricordiamo che l'applicaz. quoziente $X \rightarrow X/G$ è suriettiva e $x \mapsto [x]$

aperta, e allora anche

$$\begin{aligned} \pi \times \pi: X \times X &\longrightarrow X/G \times X/G \\ (x, y) &\longmapsto ([x], [y]) \end{aligned}$$

è suriettiva e aperta (esercizio). Allora $\pi \times \pi$ è un'identificazione. Vale

$$D = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G})$$

dove $\Delta_{X/G}$ è la diagonale in $X/G \times X/G$. Infatti

$$(\pi \times \pi)(x, y) \in \Delta_{X/G} \iff [x] = [y] \iff \exists g \in G \mid y = g(x).$$

$$\text{Quindi } X/G \text{ è T}_2 \iff \Delta_{X/G} \text{ chiusa in } X/G \times X/G \iff$$

D è chiuso in $X \times X$.

□

Oss.: Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Z \rightarrow W$ sono identificazioni, non è sempre

vero che $f \times g : X \times Z \rightarrow Y \times W$ è un'identificazione (v. fogli
 $(x, z) \mapsto (f(x), g(z))$)

di esercizi settimanali).

Gruppi topologici

Def.: Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico, tale che l'operazione di gruppo

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e l'inverso $G \longrightarrow G$ sono applicazioni continue.
 $g \longmapsto g^{-1}$

Esempi: 1) Ogni gruppo con topologia discreta oppure banale è un gruppo topologico

2) \mathbb{R}^n con topologia euclidea e operaz. la somma è un gruppo topologico.

3) $GL(n, \mathbb{R})$ opp. $GL(n, \mathbb{C})$ con operazione la multipl. di matrici, e topologia euclidea indotta dall'insieme di tutte le matrici $M_n(\mathbb{R})$ opp. $M_n(\mathbb{C})$ identificato con \mathbb{R}^{n^2} opp. \mathbb{C}^{n^2} .

4) Anche i sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$, con topologia di sottospazio, sono gruppi topologici.

Oss.: Se G è un gruppo topologico e $g \in G$, allora la multipl. a sinistra per g : $\lambda_g: G \rightarrow G$ è un omeomorfismo di G

$$x \mapsto gx$$

in se stesso. Infatti è la composizione delle seguenti applicazioni:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ x & \mapsto & (g, x) & & \\ & & (a, b) & \mapsto & (ab) \end{array} \quad \mu_g = m \circ \alpha$$

dove α è continua perché le sue componenti sono l'applicaz. costante $x \mapsto g$ e l'identità $\text{id}_G: x \mapsto x$.

Per lo stesso motivo $\rho_g: G \rightarrow G$ è continua, e analogam.

$$x \mapsto xg$$

lo sono anche $x \mapsto g^{-1}x$, $x \mapsto xg^{-1}$, e il coniugio per

g , cioè

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

Esercizio (difficile): Sia G gruppo topologico di Hausdorff, $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso. Allora $G/H = \{ \text{classi laterali sinistre di } H \}$

(ricordiamo: è uguale a G/\sim dove $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$)

è di Hausdorff.

Proprietà di numerabilità

Def.: Sia X spazio topologico.

- 1) X si dice 1°-numerabile se ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.
- 2) X si dice 2°-numerabile (o a base numerabile) se ha una base numerabile.
- 3) X si dice separabile se esiste un sottoinsieme denso in X e numerabile.

Es.: 1) Ogni spazio topologico finito o infinito numerabile soddisfa 1), 2) e 3).

2) Ogni spazio topologico discreto è 1°-numerabile, perché per ogni elem. x l'insieme $\{x\}$ è un sistema fondam. di intorni.

Però se uno spazio top. ^{discreto} è più che numerabile allora non è né 2°-num. né separabile.

- 3) \mathbb{R}^m è 1°-numerabile (es. $\{B_{1/n}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$)
2°-numerabile (es. $\{B_{1/n}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ e } p \in \mathbb{Q}^m\}$)
separabile (es. $\mathbb{Q}^m \subseteq \mathbb{R}^m$).

Lemma: Se uno sp. top. X è 2° numerabile allora è anche 1°-numerabile

Dim.: Sia \mathcal{B} base numerabile di X , e sia $p \in X$. Allora

$J = \{A \in \mathcal{B} \mid A \ni p\}$ è un sist. fondam. di intorni

di \mathcal{P} , perché ogni intorno di p contiene un aperto contenente p , e allora anche un elem. di \mathcal{J} . \square

Proposizione: 1) Ogni spazio metrico è 1°-numerabile.

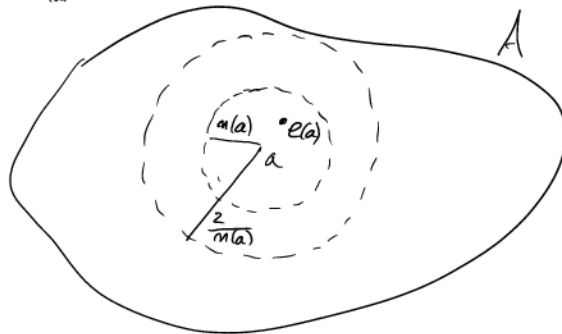
2) Ogni spazio metrico separabile è 2°-numerabile.

Dim. 1) Basta prendere $\{B_{\frac{1}{m}}(p) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ come sist. fondam. di intorni di $p \in X = \text{sp. metrico}$.

2) Sia E sottos. denso numerabile di X sp. metrico, e consid.

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(e, \frac{1}{m}\right) \mid e \in E, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}$$

E è numerabile, verifichiamo che è una base. Sia $A \subseteq X$ aperto, per ogni $a \in A$ scegliamo $m(a) > 0$ t.c. $B_{\frac{2}{m(a)}}(a) \subseteq A$, e scegliamo $e(a) \in E$ t.c. $e(a) \in B_{\frac{1}{m(a)}}(a)$ (esiste perché E è denso e $B_{\frac{1}{m(a)}}(a)$ è aperto non vuoto):



Allora vale $a \in B_{\frac{1}{m(a)}}(e(a)) \subseteq B_{\frac{2}{m(a)}}(a) \subseteq A$.
↑ per la disug. triang.

Segue: $A = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{1}{m(a)}}(e(a))$ per cui \mathcal{B} è una base. \square

Esempio: Attenzione: non è vero che uno spazio topologico separabile e 1° -numerabile è sempre 2° -numerabile.

Ad esempio $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey è 1° -numerabile, infatti $\{[x, x + \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ è un sist. fond. di intorno di $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi, ed è separabile perché \mathbb{Q} interseca ogni intervallo del tipo $[a, b[$ con $b > a$, quindi \mathbb{Q} interseca ogni aperto non vuoto, per cui \mathbb{Q} è denso. Ma X non è 2° -numerabile, infatti sia \mathcal{B} base di X , allora $[x, x + \epsilon[$ è unione di elem. di \mathcal{B} $\forall x \in X$. Dunque esiste $A_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in A_x \subseteq [x, x + \epsilon[$, in particolare $x = \min A$. Inoltre se $x \neq y$ allora $A_x \neq A_y$ perché i loro minimi sono diversi. Segue che \mathcal{B} contiene il sottoinsieme $\{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ che ha la stessa cardinalità di \mathbb{R} , per cui \mathcal{B} non è numerabile. Segue anche che X non è metrizzabile.

Successioni

Def: Sia X uno sp. top. Una successione in X è un'applicazione $a: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow X$. Una successione a converge a $p \in X$ se $\forall U \in \mathcal{I}(p) \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \mid a(m) \in U \forall m \geq N$.

Oss.: Se X è di Hausdorff e una successione converge a $p \in X$ e anche a $q \in X$, allora $p = q$.

Proposizione: Siano X sp. top. \aleph_0 -numerabile, $A \subseteq X$, $p \in X$. Sono equival.:

1) Esiste una successione in A che converge a p .

2) $p \in \overline{A}$.

Dilu.: 1) \Rightarrow 2) ovvio perché se vale 1) allora p è aderente all'immagine di a .

2) \Rightarrow 1) Sia $\{U_m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sist. fond. di intorno di p .

Per ogni m , anche $U_1 \cap \dots \cap U_m$ è intorno di p , scegliamo $a(m) \in A \cap U_1 \cap \dots \cap U_m$. Questo produce una successione a che converge a p , perché dato U intorno di p scegliamo N t.c. $U_N \subseteq U$, e allora $a(m) \in A \cap U_1 \cap \dots \cap U_N \cap \dots \cap U_m \subseteq U$ $\forall m \geq N$.

□

Def.: 1) Sia a una successione in uno sp. top. X , una sottosuccessione di a è una successione b in X tale che

$$b(m) = a(f(m)) \quad \forall m, \quad \text{dove } f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0} \text{ è}$$

un'applicazione strettamente crescente.

2) Uno sp. top. X si dice compatto per successioni se

ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente (a qualche punto di X).

Esempi: Oltre ai soliti esempi dei chiusi e limitati in \mathbb{R}^n , osserviamo:

- esistono sp. top. compatti ma non compatti per successioni (es.: prodotti infiniti)
- esistono sp. topologici compatti per successioni ma non compatti (es.: la "linea lunga")

(V. libro di Manetti per esempi di questo tipo.)

Teorema: Sia X spazio topologico.

1) Se X è compatto e 1° -numerabile, allora è compatto per successioni.

2) Se X è compatto per successioni e 2° -numerabile, allora è compatto.

Dilu.: 1) Sia X compatto e 1° -num., sia a succ. di X .

1° passo: Troviamo un "punto di accumulazione" per a .

Consideriamo $C_m = \{a_n \mid n \geq m\}$, chiuso in X $\forall m$, quindi compatto, e consid.

$$C = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} C_m \quad \text{Vale } C \neq \emptyset, \text{ perché se per}$$

assurdo $C = \emptyset$ allora $\{C_1 \setminus C_m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sarebbe un ricoprimento aperto di C_1 , senza sottoricoprimento finito perché un'unione del tipo $(C_1 \setminus C_{m_1}) \cup \dots \cup (C_1 \setminus C_{m_m})$ non contiene i punti di $C_{\max\{m_1, \dots, m_m\}} \neq \emptyset$: assurdo.

Allora esiste $p \in C$, e da questo segue:

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{I}(p) \forall m \in \mathbb{Z}_{>0} \exists n \geq m \mid a_n \in U.}$$

← questa è la def. di p punto di accumulazione di a

Sia ora $\{U_m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sistema fond. di intorni numerabile di p ,

come prima poniamo $V_m = U_1 \cap \dots \cap U_m$, allora

$\forall m \forall n \exists k = k(m, n) \geq m \mid a_k \in V_m$. Definiamo:

$$\begin{array}{l} k_1 = k(1, 1), \quad \text{cioè } \boxed{k_1 \geq 1} \quad \text{e} \quad \boxed{a_{k_1} \in V_1}, \\ k_2 = k(k_1 + 1, 2), \quad \text{cioè } \boxed{k_2 > k_1} \quad \text{e} \quad \boxed{a_{k_2} \in V_2}, \\ \vdots \\ k_j = k(k_{j-1} + 1, j), \quad \text{cioè } \boxed{k_j > k_{j-1}} \quad \text{e} \quad \boxed{a_{k_j} \in V_j}. \end{array}$$

↑
da questo segue
 $b(j) = a(k_j)$
è sottosuce.

↑
da questo
segue b
converge a p

e poniamo $b(j) = a(k_j)$: questa sottosuce. converge a p .

2) Supp. X z^0 -num. e compatto per succ., ma per assurdo non compatto.

Sia \mathcal{R} ricoprim. aperto di X senza sottoricoprim. finiti, e sia \mathcal{B} base numerabile. Per ogni $p \in X$ scegliamo $A_p \in \mathcal{B}$ e $U_p \in \mathcal{R}$ t.c. $p \in A_p \subseteq U_p$. La famiglia $\{A_p \mid p \in X\}$ ^{ricopre X e} $\forall n$ realt' \bar{e} numerabile, perch' \bar{e} contenuta in \mathcal{B} , quindi possiamo scegliere una fam. numerabile di punti $\{p_m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ tale che $\bigcup_m A_{p_m} = X$.

Poniamo $\mathcal{R}' = \{U_{p_m} \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$: \bar{e} una famiglia numerabile, \bar{e} anche un ricoprimento aperto di X perch' gli insiemi A_{p_m} ricoprono X , e \mathcal{R}' non ha sottoricoprim. finiti altrimenti ne avrebbe anche \mathcal{R} .

Scriviamo per brevit' $U_n = U_{p_m}$, per ogni n scegliamo

$a(n) \in X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n U_k \right)$ definendo la successione a .

Dimostriamo che a non ammette sottosucc. convergenti. Sia

$p \in X$ e sia $b(k) = a(\ell(k))$ sottosuccessione. Sappiamo

che $\exists N$ t.c. $p \in U_N$, e per qualsiasi k abb. grande

vale $\ell(k) \geq N$, e allora $b(k)$ non \bar{e} in U_N :

allora b non converge a p , per alcun p : assurdo.

□

Successioni di Cauchy

Def.: Sia (X, d) spazio metrico e a successione in X .
 a è detta di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists N \mid d(a_m, a_n) < \varepsilon$
 $\forall n, m \geq N$.

Oss.: Se una successione è convergente allora è di Cauchy, grazie alla disuguaglianza triangolare.

Esercizio: Se una successione di Cauchy ha una sottosucc. convergente, allora è convergente.

Def.: Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema: \mathbb{R}^n è completo.

Dim.: Sia a succ. di Cauchy, sia N tale che $d(a_m, a_n) < 1$
 $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Sia $R = \max \{ \|a(0)\|, \dots, \|a(N)\| \}$, allora
 $\|a_m\| \leq R+1 \quad \forall m \geq N$, cioè $a_m \in D = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R+1 \}$.
 D è compatto e \aleph_0 -numerabile (perché è uno sp. metrico),
allora è compatto per successioni, quindi a ammette una sottosucc.
convergente, e segue che a è convergente per l'esercizio di prima. \square

Proposizione: Sia Y sottosp. topologico di X spazio metrico completo.

Y è chiuso in $X \iff Y$ è uno spazio metrico completo
(con la restrizione della distanza su X)

Dim.: \implies Sia Y chiuso in X e sia a suce. di Cauchy in Y .

Converge a un punto $p \in X$ perché X è completo, allora p è nella chiusura dell'immagine di a , ma quest'immagine è in Y che è chiuso, per cui $p \in Y$. Cioè a converge anche in Y .

\Leftarrow Sia $p \in \overline{Y}$, visto che X è 1° -numerabile (essendo uno spazio metrico) ^{contenuta} esiste una suce. in Y che converge a p .

Allora è di Cauchy, quindi converge anche in Y a un punto $q \in Y$.

Ma X è T_2 perché è uno sp. metrico, quindi $p=q$, cioè $p \in Y$. □

Compattezza e numerabilità per spazi metrici

Def.: Uno spazio metrico X si dice totalmente limitato se

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0} \exists x_1, \dots, x_m \in X \mid X = \bigcup_{i=1}^m B_r(x_i)$$

(Att.: il numero m di punti e i punti stessi x_1, \dots, x_m possono dipendere da r .)

Lemma: Ogni spazio metrico totalmente limitato è separabile
(quindi anche 2°-numerabile)

Dim.: Dato $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ consid. E_m un insieme finito tale che X è ricoperto dalle palle aperte di raggio $\frac{1}{m}$ e centri gli elem. di E_m .

Allora $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} E_m$ è numerabile, ed è denso perché ogni $x \in X$ è a distanza $< \frac{1}{m}$ da qualche elem. di E_m , per ogni m . \square

Teorema: Sia X spazio metrico. Sono equivalenti:

- 1) X è compatto,
- 2) X è compatto per successioni,
- 3) X è completo e totalmente limitato.

Dim.: 1) \Rightarrow 2) Vale perché X è 1°-numerabile.

2) \Rightarrow 3) Supp. X compatto per successioni. Ogni suce. di

Cauchy ammette una sottosuce. convergente, quindi converge essa stessa, quindi X è completo.

Dimostriamo che è anche totalmente limitato, per assurdo:

Supponiamo esista $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che X non è ricopribile con un numero finito di palle aperte di raggio r .

Costruiamo una successione:

a_1 a piacere in X

$a_2 \in X \setminus B(a_1, r)$

$a_3 \in X \setminus (B(a_1, r) \cup B(a_2, r))$

\vdots
 $a_m \in X \setminus (B(a_1, r) \cup \dots \cup B(a_{m-1}, r))$

Con questa scelta vale $d(a_m, a_n) \geq r \quad \forall m \neq n$, quindi nessuna sottosucc. può essere di Cauchy, quindi nessuna sottosucc. può convergere: assurdo.

3) \Rightarrow 1) | Supp. X completo e totalm. limitato.

Per il lemma, X è 2^o-numerabile, quindi per dim. che è compatto basta dim. che è compatto per successioni.

Sia a successione in X , per ogni $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ consid. un insieme finito E_m tale che

$$X = \bigcup_{e \in E_m} B_{2^{-m}}(e)$$

Costruiamo una sottosucc. convergente:

per $m=1$ scegliamo $e_1 \in E_1$ tale che $B(e_1, 2^{-1})$ contiene $a(n)$ per infiniti valori di n . Scegliamo anche k_1 tale che $a(k_1) \in B(e_1, 2^{-1})$;

per $m=2$ scegliamo $e_2 \in E_2$ tale che $B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$ contiene $a(n)$ per infiniti valori di n . Scegliamo anche k_2 tale che $a(k_2) \in B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$ e $k_2 > k_1$.

Andando avanti costruiamo la sottosucc. $a(k_1), a(k_2), \dots$ e si dimostra facilmente che \bar{e} di Cauchy, quindi converge perché X è completo. Allora X è compatto per successioni.

□

Complementi: assioma della scelta e prodotti infiniti

Uno dei modi più comuni di porre i fondamenti della matematica è di formalizzare la teoria degli insiemi tramite gli assiomi di Zermelo-Fraenkel.

Questi assiomi si interpretano intuitivamente pensando che ogni oggetto della matematica è un insieme, e gli assiomi esprimono proprietà di base degli insiemi, ad esempio uno degli assiomi è

$$\bar{e} \quad A=B \iff (\forall x: x \in A \iff x \in B)$$

cioè "due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi". Per evitare paradossi quali il paradosso di Russell, gli assiomi Z-F autorizzano a "creare" nuovi insiemi solo in certe situazioni. Ad esempio se A è un insieme, allora esiste l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$, e se A è un insieme allora esiste $\bigcup A =$ l'unione di tutti gli elem. di A (i quali sono d'altronde essi stessi insiemi). Tramite gli assiomi si riescono allora a costruire le coppie ordinate (A, B) , l'insieme $X \times Y = \{(A, B) \mid A \in X, B \in Y\}$, e l'insieme delle applicazioni $Y^X = \{f: X \rightarrow Y\}$ (si identifica ciascuna f con il suo grafico che è un sottoinsieme di $X \times Y$, quindi di fatto Y^X è un sottoins. di $\mathcal{P}(X \times Y)$).

Si creano come insiemi anche gli insiemi dei numeri \mathbb{N}, \mathbb{Z} , ecc..., interpretando i numeri naturali come insiemi, ad es. $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ecc... L'esistenza di $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ costruito così è uno degli assiomi.

Intuitivamente si vorrebbe anche creare un prodotto di infiniti insiemi, ad es. $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots$, ad esempio come l'insieme delle successioni $s: \mathbb{Z}_{>1} \rightarrow \bigcup_i A_i$ t. c.

$s(i) \in A_i \quad \forall i$. Più in generale, data una famiglia \mathcal{F} di insiemi (anche non numerabile), si vorrebbe considerare il prodotto di tutti gli elem. della famiglia

$$\prod_{A \in \mathcal{F}} A$$

e i suoi elementi si potrebbero descrivere come le applicazioni

$$s: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \quad (= \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A)$$

tali che $s(A) \in A$ (cioè stiamo usando gli insiemi stessi della famiglia come gli "indici" della "successione").

Dare una tale s vorrebbe dire poter scegliere un elemento $s(A)$ nell'insieme A , e questo sistematicamente per ogni $A \in \mathcal{F}$. Intuitivamente sembra sempre possibile ($\& A \neq \emptyset$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, chiaramente), tuttavia non segue dagli assiomi Z-F. Si aggiunge allora come assioma aggiunto detto "della scelta", che potremmo scrivere come:

• se $A \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F}$ allora $\prod_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$.

Questo assioma permette di dimostrare fatti familiari a cui siamo abituati, ad es. che ogni spazio vettoriale ha una base, o che ogni anello ha ideali massimali.

Stano ora X_i spazi topologici $\forall i \in I =$ insieme qualunque.

Consideriamo il prodotto di tutti gli spazi topologici

$$X = \prod_{i \in I} X_i.$$

Su X si possono mettere in genere diverse topologie.

Def: La topologia prodotto è la meno fine che rende continue

$$\text{le proiezioni } \pi_i: X \rightarrow X_i \\ \varphi \mapsto \varphi(i)$$

Quindi in top. prodotto sono aperti sicuramente i sottoinsiemi del tipo

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{dove } A_i = \begin{cases} \text{aperto di } X_{i_0} & \text{se } i = i_0 \\ X_i & \text{se } i \neq i_0 \end{cases}$$

per un $i_0 \in I$ e, usando intersec. finite, sono aperti

anche gli insiemi del tipo

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{dove } A_i = \begin{cases} \text{ap. di } X_i & \text{se } i \in \{i_1, \dots, i_m\} \\ X_i & \text{se } i \notin \{i_1, \dots, i_m\} \end{cases}$$

per qualche scelta di un numero finito di indici $i_1, \dots, i_m \in I$.

Questi insiemi formano una base della top. prodotto.

Att.: non sono sempre aperti i sottospazi del tipo

$\prod_{i \in I} B_i$ con $B_i \subseteq X_i$ aperto $\forall i \in I$.
se I è infinito.

Teorema (Tychonof): Se X_i è compatto $\forall i$, allora X è compatto.

Oss.: 1) Il tea. di Tychonof è equivalente all'assioma della scelta.

2) Se $I = \mathbb{R}$ e $X_i = \mathbb{R} \forall i \in I$, allora

$$X = \prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Su X e su suoi sottospazi (es. le fun. continue, derivabili, ecc...) si mettono diverse topologie, utili in analisi.

TOPOLOGIA ALGEBRICA

Omotopia

Def.: Due applicaz. $f, g: X \rightarrow Y$ continue fra spazi topologici si dicono omotope se esiste $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ continua t.c.

$F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$. In tal caso F si dice omotopia fra f e g .

Oss.: Spesso si pensa F come una famiglia $\{f_t: X \rightarrow Y\}$ con $F(x,t) = f_t(x)$ di appl. $X \rightarrow Y$ che "varia in modo continuo", partendo da $f_0 = f$ per $t=0$ fino a $f_1 = g$ per $t=1$.

Esempio: Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e X è qualsiasi, allora qualsiasi siano $f, g: X \rightarrow Y$ sono omotope, basta porre

$$F(x,t) = f(x) \cdot (1-t) + g(x) \cdot t \quad (\in Y \quad \forall x \in X \quad \forall t \in [0,1]).$$

Lemma: L'omotopia è una rel. d'equivalenza sull'insieme $C(X,Y) =$
 $= \{f: X \rightarrow Y \text{ continua}\}, \quad \forall X, Y \text{ sp. top.}$

Dim.: 1) Ogni f è omotopa a se stessa tramite

$$F(x,t) = f(x) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in [0,1]$$

2) Se F è omotopia fra f e g , allora $\tilde{F}(x,t) = F(x,1-t)$ è omotopia fra g ed f .

3) Se F è omotopia fra f e g , e G è omotopia fra g ed h ,

allora

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x,2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è omotopia fra f ed h .

□

Esempio: Consid. $f: S^m \rightarrow S^m$ la mappa antipodale.
 $x \mapsto -x$

Domanda: f è omotopa all'identità $\text{id}_{S^m}: S^m \rightarrow S^m$?

È una domanda difficile, vediamo casi particolari.

Se $m=1$ allora f è omotopa all'identità, perché basta prendere come F la rotazione ^{attorno all'origine} di un angolo $t \cdot \pi$, allora per $t=0$ abbiamo l'identità, invece se $t=1$ allora abbiamo la rotazione di π , che è proprio f .

Possiamo applicare quest'idea per ogni m dispari, invece per m pari f e id_{S^m} non sono omotope. Vediamo con precisione il caso m dispari. Vediamo S^m dentro $\mathbb{R}^{\overset{(n+1)}{\uparrow}}_{\text{pari}} = \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$, cioè

$$S^m = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}} \mid \|z\| = 1 \right\}$$

e definiamo $F(z, t) = z e^{i\pi t}$, che è effettivamente un'omotopia da id_{S^m} a f .

Definizione: Un'applicazione \checkmark $f: X \rightarrow Y$ si dice equivalenza omotopica se esiste $g: Y \rightarrow X$ continua tale che $g \circ f: X \rightarrow X$ è omotopa all'identità id_X , e $f \circ g: Y \rightarrow Y$ è omotopa all'identità id_Y .

Due spazi topologici si dicono omotopicam. equivalenti se esiste una equivalenza omotopica fra X e Y .

Oss.: Un omeomorfismo è anche un'equivalenza omotopica, quindi spazi omeomorfi sono anche omotopicam. equivalenti. Il viceversa non vale, cioè l'equivalenza omotopica è una relazione più debole dell'omeom.

Infatti ad esempio tutti i sottospazi convessi non vuoti di \mathbb{R}^m sono omotopicamente equivalenti, vediamo:

siano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ convessi non vuoti, prendiamo due applicazioni costanti $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$. Allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono appl. continue e omotope rispettivamente all'identità su Y e su X , perché i codomini sono convessi.

Definizione: Uno spazio topologico si dice contraibile (o contrattile) se è omotopicam. equivalente a un singolo punto.

Oss.: 1) X è contraibile se e solo se $\text{Id}_X: X \rightarrow X$ è omotopa a un'applicazione costante $X \rightarrow X$.

2) X contraibile $\implies X$ connesso per archi

Il viceversa non è vero, ad es. vedremo che S^2 non è contraibile.

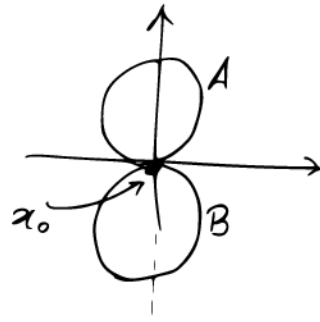
Retrazioni e deformazioni

Definizione: Sia X sp. topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice retrato di X se esiste un'applicazione continua $r: X \rightarrow Y$ tale che $r(y) = y \quad \forall y \in Y$.

Esempio: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dall'unione di due circonferenze A e B

che si toccano in un punto:

Allora A è un retratto di
 $X = A \cup B$, ad es.



$$X = A \cup B$$
$$A \cap B = \{x_0\}$$

$$r: X \rightarrow A$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ x_0 & \text{se } x \in B \end{cases}$$



Definizione: Sia X spazio topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice retrato per deformazione di X se esiste un'applicazione continua (detta deformazione)

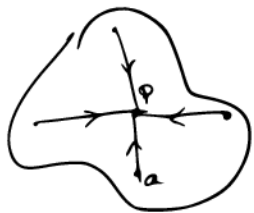
$$R: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

tale che

$$1) R(x, 0) \in Y \quad \text{e} \quad R(x, 1) = x \quad \forall x \in X$$

$$2) R(y, t) = y \quad \forall y \in Y \quad \forall t \in [0, 1]$$

Esempio: 1) Se $A \subseteq \mathbb{R}^m$ è stellato, cioè esiste un punto $p \in A$ tale che $\forall a \in A$ il segmento da p ad a è tutto contenuto in A ,



allora $\{p\}$ è un retratto per deformazione di A , basta prendere

$$R(x, t) = tx + (1-t)p$$

2) Riprendiamo $X = A \cup B$ l'unione di due circonferenze come prima. Allora A non è un retratto per deformazione di X , ma non è facile dimostrarlo, lo vedremo.

Proposizione: Siano X uno sp. topologico, e $Y \subseteq X$ un retratto per deformazione di X . Allora Y è un retratto di X , e l'inclusione $\iota: Y \rightarrow X$ è un'equivalenza omotopica.

$$y \mapsto y$$

Dim.: Sia $R: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una deformazione. Allora ponendo $r: X \rightarrow Y$ otteniamo chiaramente una retractione,

$$x \mapsto R(x, 0)$$

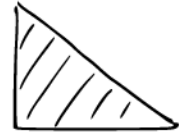
quindi Y è un retratto di X . Inoltre, dalle proprietà di R segue anche che R stessa è un'omotopia fra $\iota \circ r$ e Id_X , e anche che $r \circ \iota$ è proprio uguale all'identità Id_Y . Quindi r (e anche l'inclusione ι) è un'equivalenza omotopica. \square

Esempi: 1) S^m è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$, basta prendere la deformazione

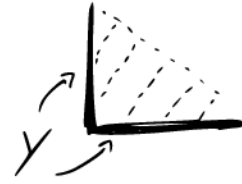
$$R: (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$$

$$(x, t) \longmapsto tx + \frac{x}{\|x\|} \cdot (1-t)$$

2) $X =$ triangolo („pieno“) in \mathbb{R}^2



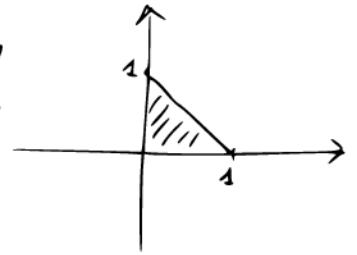
$Y =$ unione di due lati del triangolo



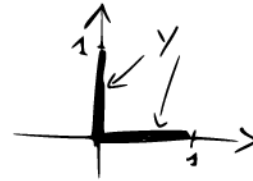
allora Y è retratto per deformazione

di X . Vediamolo in dettaglio in un esempio concreto (in generale è simile):

$$X = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0, b \geq 0, a+b \leq 1 \}$$



$$Y = X \cap (\text{assi cartesiani})$$



Una deformazione si può dare in tanti modi, l'idea è di „schiacciare“ (al variare di un parametro $t \in [0,1]$) il triangolo X sui due lati



$t=1$



...



...



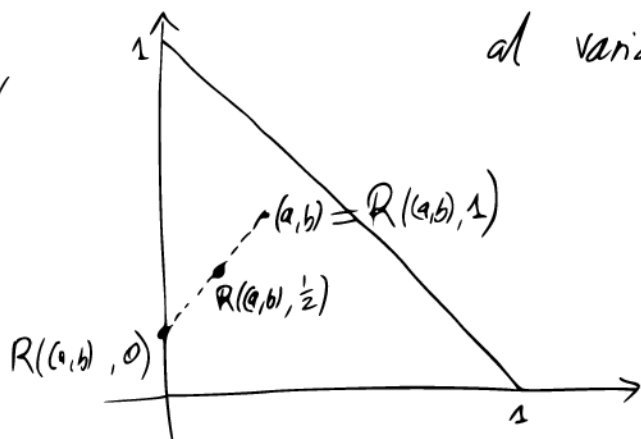
$t=0$

(← per la definizione, devo avere Y come immagine per $t=0$)

Ad es.

$$R((a,b), t) = t(a,b) + (1-t)(a - \min\{a,b\}, b - \min\{a,b\})$$

fa "percorrere" ad ogni punto (a,b) il segmento a 45° verso gli assi, al variare di t da 1 a 0.



Gruppo fondamentale

Cammino in uno spazio topologico X : applicaz. continua $\alpha: [0,1] \rightarrow X$

$\alpha(0)$ = "punto iniziale", $\alpha(1)$ = "punto finale". Il cammino α si dice

chiuso se $\alpha(0) = \alpha(1)$, e il punto $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ si chiama punto base.

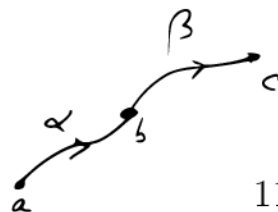
Definizione: 1) Sia X spazio topologico, e $a, b \in X$. Denotiamo con

$$\Omega(X, a, b) = \left\{ \alpha: [0,1] \rightarrow X \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ cammino con} \\ \alpha(0) = a, \alpha(1) = b \end{array} \right\}.$$

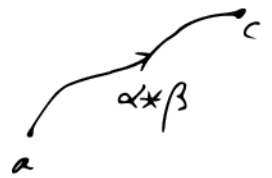
2) Dati $a, b, c \in X$ e $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$,

si definisce la giunzione (o concatenazione)

$\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$ come



$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



e si definisce l'inversione di α , denotata $i(\alpha) \in \Omega(X, b, a)$,
come $i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$.



Oss.: Abbiamo $i(i(\alpha)) = \alpha$, $i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$, che si verificano facilmente.

Definizione: Dati cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, si dicono omotopicamente equivalenti se sono omotopi tramite un'omotopia che lascia fissi a e b per ogni valore del parametro. Cioè deve esistere $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua, tale che

si scrive $\alpha \sim \beta$

$$1) F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

(cioè F è omotopia da α a β)

$$2) F(0, s) = a, \quad F(1, s) = b \quad \forall s \in [0, 1]$$

Una tale F si dice omotopia di cammini.

Oss.: 1) L'omotopia di cammini così definita è una relaz. di equivalenza.

2) Attenzione alla terminologia: omotopia di cammini è una nozione

più restrittiva dell'omotopia "standard" (che potremmo considerare anche per due cammini). Nel corso sarà facile non sbagliarsi: fra cammini considereremo solo l'omotopia di cammini, e mai l'omotopia "standard".

Esempio: Se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso e $a, b \in X$ sono punti qualsiasi, allora ogni α e $\beta \in \Omega(X, a, b)$ sono cammini omotopicamente equivalenti

Oss.: Giunzione e inversione sono ben definite anche fra le classi di omotopia di cammini, cioè dati

$$\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b), \quad \alpha \sim \alpha'$$

$$\beta, \beta' \in \Omega(X, a, b), \quad \beta \sim \beta'$$

allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ (la verifica è immediata, basta "appiccicare" le due omotopie da α ad α' e da β a β') e

anche $i(\alpha) \sim i(\alpha')$ (qui basta rimpiazzare t con $1-t$ nell'omotopia da α ad α').

Vediamo ora che passando da un cammino ad una "parametrizzazione" si ottiene un cammino equivalente a quello di partenza.

Lemma: Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e sia $\Phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$. Allora α è equivalente a $\beta \in \Omega(X, a, b)$ definito come $\beta(t) = \alpha(\Phi(t))$.

Dim.: Un'omotopia di cammini da α a β è $F(t, s) = \alpha((1-s)t + s\Phi(t))$ 173

Oss.: In generale, la funzione non è associativa, se consideriamo i cammini veri e propri. Però è associativa a meno di omotopia di cammini; l'idea è che $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ differiscono solo per una riparametrizzazione.

Proposizione: Dati $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$, $\gamma \in \Omega(X, c, d)$ abbiamo $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Dim.: $((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = (\alpha * (\beta * \gamma))(\varphi(t))$ dove

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{per } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ t + \frac{1}{4} & \text{per } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{t+1}{2} & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

Definizione: Nell'insieme $\Omega(X, \overset{\uparrow}{\text{uguali}} a, a)$ è definito il cammino costante $\mathbb{1}_a : [0, 1] \rightarrow X$ come $\mathbb{1}_a(t) = a \forall t$.

Proposizione: Dato $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ allora sono definiti $\mathbb{1}_a * \alpha$ e

$\alpha * \mathbb{1}_b$, e vale:

1) $\mathbb{1}_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \mathbb{1}_b$

2) $\alpha * i(\alpha) \sim \mathbb{1}_a$, $i(\alpha) * \alpha \sim \mathbb{1}_b$

(cioè, a meno di omotopia, $\mathbb{1}_a$ ha il ruolo di elem. neutro

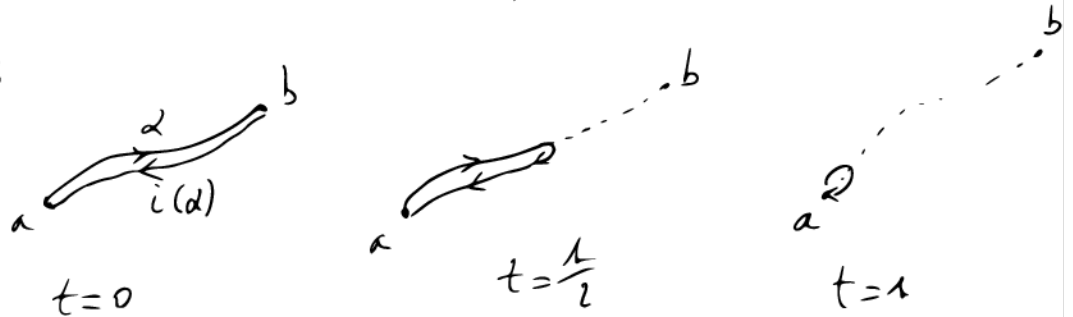
e $i(\alpha)$ ha il ruolo di inverso di α .

Dimostrazione: 1) Le omotopie di cammini si ottengono parametrizzando.

$$(\Delta_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t)) \quad \text{dove } \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t-1 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \Delta_b)(t) = \alpha(\eta(t)) \quad \text{con } \eta(t) \text{ analoga.}$$

2) Idea:

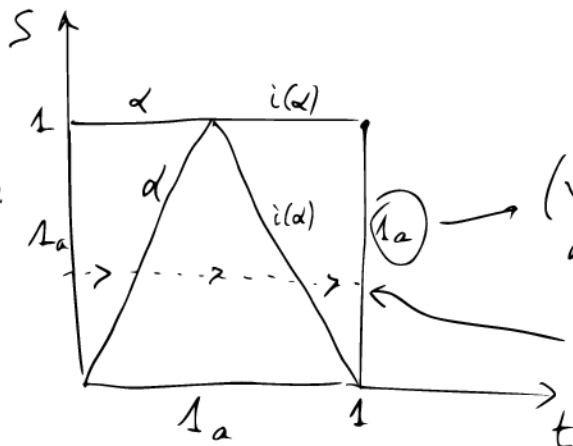


(cioè i cammini "intermedi" si ottengono percorrendo solo un pezzo di α , e poi tornando indietro con $i(\alpha)$)

Questo si realizza con l'omotopia seguente:

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{s}{2}] \\ \alpha(s) & \text{per } t \in [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}] \\ \alpha(2-2t) & \text{per } t \in [1 - \frac{s}{2}, 1] \end{cases}$$

Schematicamente:



(vuol dire che restringendo F a questo segmento si ottiene Δ_a)

percorrere un pezzo di α , poi sta fermo per un po', poi torna indietro.

Definizione: Sia X spazio topologico, $a \in X$. Definiamo

$$\pi_1(X, a) = \frac{\Omega(X, a, a)}{\sim}$$

$\sim \leftarrow$ omotopia di cammini

Come al solito, dato $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ denotiamo $[\alpha] \in \pi_1(X, a, a)$ la sua classe d'equivalenza.

Teorema: Con la giunzione e l'inversione (di classi di cammini), $\pi_1(X, a)$ è un gruppo, con elemento neutro $[1_a]$. Cioè l'operazione di gruppo è

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

e l'inverso di $[\alpha]$ è $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$.

Dim.: È una conseguenza immediata di quanto visto finora. \square

Definizione: $\pi_1(X, a)$ si dice gruppo fondamentale (o primo gruppo di omotopia) di X (con punto base a).

Oss.: Sia X_0 la componente connessa per archi di X contenente a .

Allora ogni cammino $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ è in realtà tutto contenuto in X_0 .

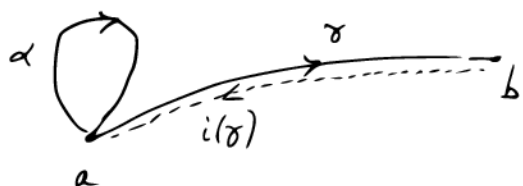
Segue che $\pi_1(X, a)$ dipende solo da X_0 (anche se formalmente π_1 è definito usando tutto X).

Esempio: Ovviamente se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso allora $\pi_1(X, a)$ è banale (cioè contiene solo l'elem. neutro) $\forall a \in X$.

Oss.: Attenzione: se $a, b \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, i gruppi $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(X, b)$ sono strettamente legati fra loro, ma non sono lo stesso gruppo.
Vediamolo in dettaglio:

Lemma: Siano a, b nella stessa componente connessa per archi di X .
Scegliamo $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ un cammino da a a b , e definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} \gamma_{\#} : \pi_1(X, a) &\longrightarrow \pi_1(X, b) \\ [\alpha] &\longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$



$$\gamma_{\#}([\alpha]) = \text{diagram of } i(\gamma) * \alpha * \gamma$$

Allora $\gamma_{\#}$ è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi.

Dim: $\gamma_{\#}$ è ben definita, perché ^(abb. già visto che) la concatenazione si "comporta bene" con l'omotopia di cammini, cioè se $\alpha \simeq \alpha'$ allora $i(\gamma) * \alpha * \gamma \simeq i(\gamma) * \alpha' * \gamma$.

Dim. che $\gamma_{\#}$ è un omom. di gruppi: dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, a)$ dim. che

$$\gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \gamma_{\#}([\beta]) \stackrel{(?)}{=} \gamma_{\#}([\alpha] \cdot [\beta])$$

\uparrow op. in $\pi_2(X, b)$ \uparrow op. in $\pi_2(X, a)$

Abb:

$$\begin{aligned} \gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \gamma_{\#}([\beta]) &= [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] = \\ &= [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma) * \beta * \gamma}_{\text{cammino omotopo a } 1_a}] = [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{1_a * \beta * \gamma}_{\text{omotopo a } \beta}] = \end{aligned}$$

per quello che
 abb. osservato prima riguarda
 a giunzione e omot. di cammini

$$= [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = \gamma_{\#}([\alpha * \beta]) = \gamma_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]).$$

Quindi $\gamma_{\#}$ è un omomorfismo di gruppi. Dim. che è un isomorfismo

dandone l'inversa; è $i(\gamma)_{\#} : \pi_2(X, b) \rightarrow \pi_2(X, a)$.

In fatti $(i(\gamma)_{\#}) \circ \gamma_{\#} = \text{Id}_{\pi_2(X, a)}$, perché

$$\begin{aligned}
(i(\gamma)_\#) \left(\gamma_\#([\alpha]) \right) &= (i(\gamma)_\#) \left([i(\gamma) * \alpha * \gamma] \right) = \\
&= \left[\underbrace{i(i(\gamma))}_{\parallel \gamma} * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma) \right] = \left[\underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a} * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a} \right] = \\
&= [1_a * \alpha * 1_a] = [\alpha].
\end{aligned}$$

E si verifica analogam. che $\gamma_\# \circ (i(\gamma)_\#) = \text{Id}_{\pi_1(X, b)}$, per cui $\gamma_\#$ e $i(\gamma)_\#$ sono una l'inverso dell'altra.

□

Oss. 1) Il gruppo fondamentale è utile per dimostrare che due sp. topologie non sono omeomorfe, lo vedremo in dettaglio. L'idea è che se sono omeomorfe allora i gruppi fondamentali sono isomorfi (va fatta attenzione ai punti base però).

Vedremo anche che lo stesso vale con l'equivalenza omotopica invece dell'omeomorfismo.

2) Se X è connesso per archi, si parla anche semplicemente di gruppo fondam. di X senza riferimento al punto base, e si scrive $\pi_1(X)$. È una nozione imprecisa tuttavia, nel senso che è un gruppo "definito a meno di isomorfismo".

Definizione: Uno sp. topologico X si dice semplicemente connesso se \bar{e} connesso per archi e se $\pi_1(X)$ \bar{e} banale (più precisamente diremmo che $\pi_1(X, a)$ \bar{e} banale per un $a \in X$, e quindi \bar{e} banale per ogni $a \in X$).

Proposizione: Siano X, Y spazi topologici, $a \in X$, $b \in Y$.

Allora $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ \bar{e} isomorfo a

$$\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

↑
prodotto di gruppi

Dim.: Ogni cammino $\alpha: [0, 1] \rightarrow X \times Y$ \bar{e} univocam. determinato dalle sue componenti $\alpha_1: [0, 1] \rightarrow X$ e $\alpha_2: [0, 1] \rightarrow Y$ dove $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, viceversa dati cammini α_1, α_2 allora α \bar{e} definito. Questo induce una biiezione

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X \times Y, (a, b), (a, b)) & \longrightarrow & \Omega(X, a, a) \times \Omega(Y, b, b) \\ \alpha \longmapsto & & (\alpha_1, \alpha_2) \end{array}$$

Lo stesso vale per le omotopie di cammini $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$, quindi la biiezione passa ai quozienti

$$\begin{aligned} \pi_1(X \times Y, (a,b)) &\longrightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b) \\ [\alpha] &\longmapsto ([\alpha_1], [\alpha_2]) \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che si tratta di un omomorfismo biiettivo di gruppi, cioè un isomorfismo.

□

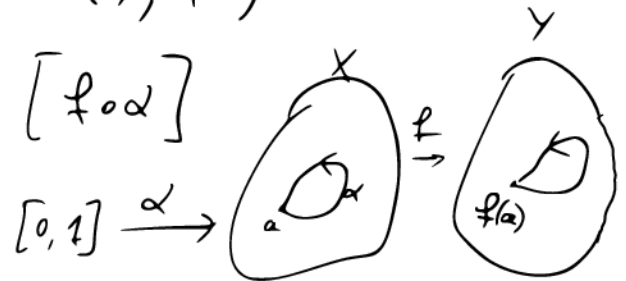
Proprietà functoriali

Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici. Dato $a \in X$

definiamo $f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$

$$[\alpha] \longrightarrow [f \circ \alpha]$$

$$[0,1] \xrightarrow{\alpha}$$



Proposizione: f_* è ben definita (cioè $f_*([\alpha])$ non dipende dalla scelta di $\alpha \in [\alpha]$) ed è un omom. di gruppi.

Dim.: In generale dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ con $\alpha \sim \beta$, allora

$f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ sono in $\Omega(Y, f(a), f(b))$ e vale

$f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Infatti se $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ è

un'omotopia di cammini da α a β , allora la composizione

$f \circ F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow Y$ è un'omotopia di cammini da $f \circ \alpha$ a $f \circ \beta$.

Quindi f_* è ben definita. Inoltre dati $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta \in \Omega(X, b, c)$ vale

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$$

da cui f_* è un omom. di gruppi.

(Vale anche $i(f \circ \alpha) = f \circ (i(\alpha))$.)

□

Es.: Se prendo $\text{Id}_X: X \rightarrow X$, allora $(\text{Id}_X)_*$ è l'identità su $\pi_1(X, a)$

Se invece considero $f: X \rightarrow X$ costante ($f(x) = c$ fissato, $\forall x \in X$)

allora $f_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$ è l'omomorfismo banale,

che manda ogni elem. nell'elem. neutro. (c)

Lemma: Sia X uno sp. topologico, $A \subseteq X$, $a \in A$. Consideriamo l'inclusione $\iota: A \rightarrow X$, e l'omom. $\iota_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$.

1) Se A è retrato di X , allora ι_* è iniettivo.

2) Se A è retrato per deformazione, allora ι_* è un isomorfismo.

Dim.: 1) Sia $\alpha \in \Omega(A, a, a)$ tale che $\iota_*([\alpha]) = e_{\pi_1(X, a)}$

($e_G = \text{elem. neutro del gruppo } G$)

Cioè esiste un'omotopia di cammini $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ da α a α_a .

Sia ora $R: X \rightarrow A$ retrazione. Allora $R \circ F$ è un'omotopia di cammini in A dallo stesso α ad α_a .

Cioè α è omotopo a α_a anche in A , cioè $[\alpha]$ è banale anche in $\pi_1(A, a)$, quindi L_x è iniettiva.

2) Sia ora A retratto per deformazione di X . Sia

$D: X \times [0,1] \rightarrow X$ deformazione di X su A .

In particolare L_x è iniettiva perché A è un retratto. Toibb. dim. che L_x è suriettiva.

Sia $\beta \in \Omega(X, a, a)$, definiamo

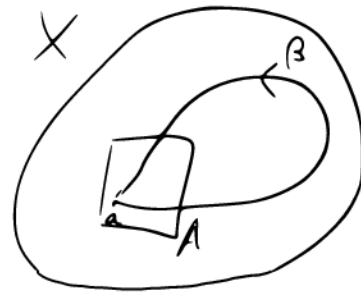
$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ ponendo

$$F(t, s) = D(\beta(t), s).$$

Abb. $F(-, 1) = \beta(-)$, $F(-, 0) = \beta'(-)$ con

$\beta': [0,1] \rightarrow A$ continua, e F è omotopia di cammini

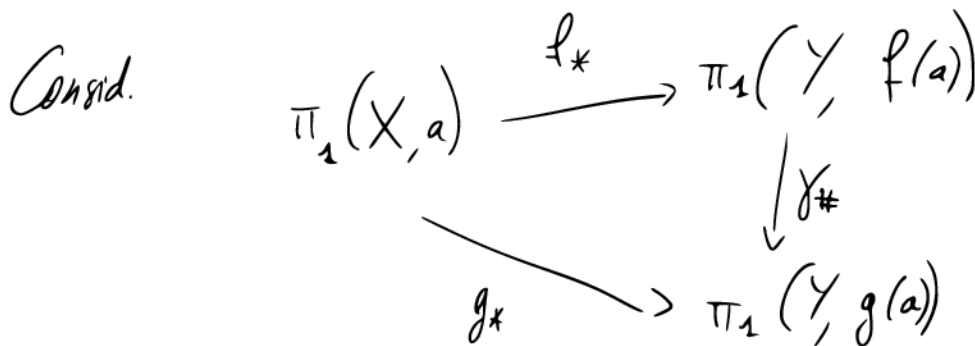
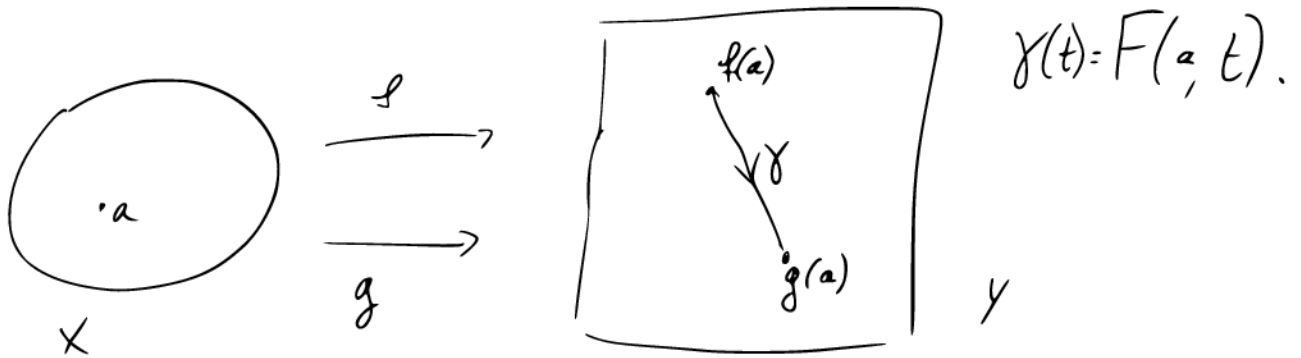
da β' a β (oss.: F mantiene ^{fissi} i punti iniziali e finali)



dei cammini perché D è l'identità su A per ogni valore di s .
 D'altronde $[\beta'] \in L_*(\pi_1(A, a))$ e $[\beta] = [\beta']$ in $\pi_1(X, a)$,
 cioè L_* è suriettiva. □

Proposizione: Siano $f, g: X \rightarrow Y$ appl. continue fra spazi topologici.

Supponiamo siano omotope, e sia $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ un'omotopia da f a g . Sia $a \in X$, e sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ def. come



Allora il diagramma è commutativo, cioè $g_* = \gamma_* \circ f_*$.

Dim.: Consid. $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$. Abb.:

$$g_*([\alpha]) = [g \circ \alpha] \quad (\gamma_* \circ f_*)([\alpha]) = [i(\gamma) * (f \circ \alpha) * \gamma]$$

Ci si abbiano quattro gruppi $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\eta} D$ e omomorfismi φ, ψ, η tali che $\psi \circ \varphi$ e $\eta \circ \psi$ sono isomorfismi. Come in un esercizio dei fogli sett., allora sono tutti isomorfismi. \square

Oss.: Ricordiamo: se $Y \subseteq X$ è retracts per def. dello sp. top. X , allora l'inclusione $\iota: Y \rightarrow X$ è un'equivalenza omotopica. Il teorema allora implica che ι_X è un isom. di gruppi, cosa che avevamo già dimostrato direttamente.

Teorema di Seifert - Van Kampen

Esempio: Calcoleremo il gruppo fondam. di S^m con $m \geq 2$:

vedremo che $\pi_1(S^m) = \text{banale}$

Intuitivamente:

$m=2$



Se abbiamo $[\alpha] \in \pi_1(S^2, a)$ con $\alpha([0,1]) \subseteq S^2$, allora possiamo scegliere $b \in S^2 \setminus \alpha([0,1])$ e allora α è tutto contenuto in $S^2 \setminus \{b\}$ che è omeomorfo a

\mathbb{R}^2 , contraibile. Allora sicuramente $\alpha \sim 1_\alpha$, cioè
[α] = elem. neutro. Questo ragionamento però non si può
applicare a cammini $[0,1] \rightarrow S^2$ suicidi (esistono!).

Useremo allora:

Teorema (parte del teo. di Seifert-Van Kampen):

Sia X spazio topologico, siano $A, B \subseteq X$ aperti,
con $A \cup B = X$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Scegliamo

$a \in A \cap B$, e consideriamo $f: A \rightarrow X$ e
 $g: B \rightarrow X$ le inclusioni, e gli omomorfismi

$$f_*: \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a) \quad \text{e} \quad g_*: \pi_1(B, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

Se $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi, allora
le immagini $f_*(\pi_1(A, a))$ e $g_*(\pi_1(B, a))$ generano
 $\pi_1(X, a)$.

Es.: Si potrebbe tentare di usare il teorema per calcolare
 $\pi_1(S^1)$, ad es usando $A = S^1 - \{0, 1\}$

e $B = S^1 - \{0, -1\}$, allora $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$ sono
banali. Ma $A \cap B$ non è connesso per archi.

Per la dim., usiamo:

Teorema (del numero di Lebesgue): Sia (Y, d) uno spazio metrico compatto e $f: Y \rightarrow X$ continua, con X spazio topologico. Sia \mathcal{R} ricoprimento aperto di X , allora esiste $\delta > 0$ tale che $\forall y \in Y \exists A \in \mathcal{R} \mid f(B(y, \delta)) \subseteq A$.

Dim.: Sapp. che $f(Y)$ è compatto e quindi esiste un numero finito di elem. $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$f(Y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Consid. $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \max \left\{ d(y, Y \setminus f^{-1}(A_1)), \dots, d(y, Y \setminus f^{-1}(A_m)) \right\}.$$

Abb.: g è continua, inoltre $g(y) \neq 0 \forall y \in Y$

perché se ^{per assurdo} avessi $g(y) = 0$ allora y appartenerebbe al chiuso $Y \setminus f^{-1}(A_i) \forall i$, e allora avrei $f(y) \notin A_i \forall i$, assurdo.

D'altronde g ha un minimo su Y per compattezza, e sia

$$\delta = \min_{y \in Y} g(y).$$

Allora per ogni $y \in Y$ abb. $g(y) \geq \delta$, cioè esiste i tale che $d(y, Y \setminus f^{-1}(A_i)) \geq \delta$. Segue che $B(y, \delta)$ è contenuta in $f^{-1}(A_i)$, cioè $f(B(y, \delta)) \subseteq A_i$. \square

Corollario: Sia $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ continua con X sp topologico.

Sia \mathcal{R} ricoprimento aperto di X , allora esiste $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $\forall i \in \{0, \dots, m-1\} \exists A_i \in \mathcal{R}$ tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\right) \subseteq A_i$.

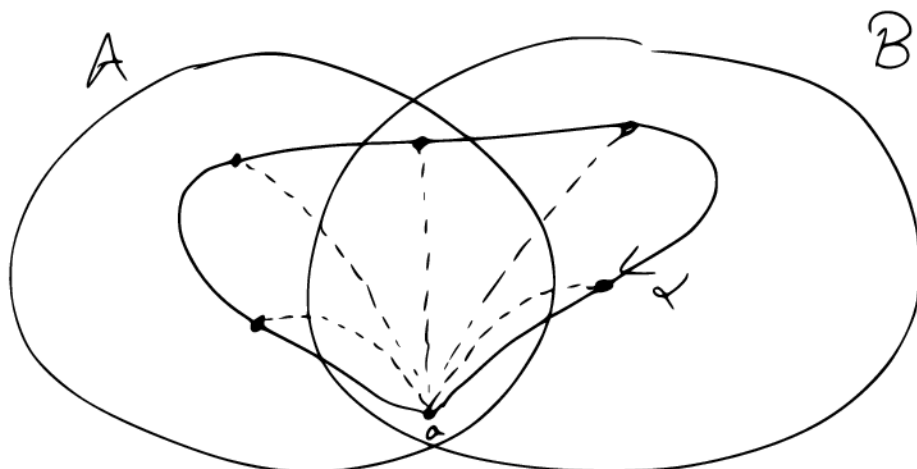
Dim.: Usiamo il teo. del numero di Lebesgue con $Y = [0, 1]$, sia δ come nel teorema, e m tale che $\frac{1}{m} < \delta$. Allora

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\right) \subseteq \alpha\left(B\left(\frac{i}{m} + \frac{1}{2m}, \delta\right)\right) \stackrel{\uparrow}{\subseteq} A_i \text{ per il teorema.}$$

\square

Dim. del teorema di S.-V.K.

Idea:



cammino omotopo ad α :



Sia $\alpha \in \Omega(X, a, a)$, dimostriamo che esistono

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tali che $\alpha \sim \gamma_1 * \dots * \gamma_m$ e

$$\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) & \text{opp.} \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$$

Sia m come nel corollario, così tale che

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\right) \subseteq \begin{cases} A & \text{opp.} \\ B \end{cases} \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

Denotiamo $x_i = \alpha\left(\frac{i}{m}\right)$ ($x_0 = a, x_1 = \alpha\left(\frac{1}{m}\right), \dots$),

e definiamo $d_i : [0, 1] \rightarrow X$ come

$$d_i(t) = \alpha \left(\frac{i-1+t}{n} \right) \quad \text{cioè } d_i \text{ percorre il tratto di } \alpha$$

che va da x_{i-1} a x_i .

Ora $\forall i$ scegliamo β_i un cammino da x_i a a , cioè

$\beta_i \in \Omega(X, x_i, a)$, tale che:

1) Se $x_i \in A$ allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, a)$.

2) Se $x_i \in B$ allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, a)$.

3) Se $x_i \in A \cap B$ allora $\beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, a)$.

È possibile perché $A \cap B, A, B$ sono connessi per archi.

Consideriamo allora:

$$(\alpha_1 * \beta_1) * (i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2) * (i(\beta_2) * \alpha_3 * \beta_3) * \dots * (i(\beta_{n-1}) * \alpha_n)$$

evidentemente è un cammino omotopo ad d . D'altronde ponendo

$$\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1, \quad \gamma_2 = (i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2), \dots, \quad \gamma_n = (i(\beta_{n-1}) * \alpha_n)$$

abb. $\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$ opp. Oss.: abbiamo usato effettivamente.

che $A \cap B$ è connesso per archi, per essere sicuri che γ_i abbia questa proprietà.

Segue: ogni elem. di $\pi_1(X, a)$ è prodotto di elem. $[\gamma_1] \cdots [\gamma_m]$ tali che γ_i "viene" da A o da B , cioè $[\gamma_i] \in f_* (\pi_1(A, a))$ opp. $g_* (\pi_1(B, a))$. □

Corollario: Siano A, B come nel teorema di S. - V. K., e siano A, B semplicemente connessi. Allora X è semplicemente connesso.

Dim.: Se $\pi_1(A, a)$ e $\pi_1(B, a)$ sono banali allora lo è anche $\pi_1(X, a)$. □

Corollario: S^m è semplicem. conn. per $m \geq 2$.

Dim.: Usiamo il corollario con $S^m = A \cup B$ con $A = S^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ e $B = S^m \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$. Allora A e B sono omeomorfi a \mathbb{R}^m , quindi semplicemente connessi. Invece $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m \setminus \{pt\}$, che è connesso per archi se $m \geq 2$. □

Corollario: $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$ è semplicemente connesso $\forall m \geq 0$.

Dlm: v. foglio di esercizi settimanali. \square

Rivestimenti

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$
 $t \mapsto (\cos(2\pi mt), \sin(2\pi mt))$

Definizione: Sia $f: X \rightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici.

L'appl. f si dice omeomorfismo locale se $\forall x \in X$

$\exists U$ intorno aperto di x e V intorno aperto di $f(x)$ in

Y tali che $f(U) = V$ e $f|_U: U \rightarrow V$ è
un omeomorfismo.

Es: 1) Ogni omeomorfismo è un omeom. locale.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ di prima è un omeomorfismo locale, basta prendere come U un intervallo aperto più "corto" di $\frac{1}{m}$, allora anch'è iniettivo in S^1 , e la sua immagine è aperta in S^1 e omeomorfa a U stesso (v. foglio di esercizi settimanali).

Definizione: Sia $p: E \rightarrow X$ un'applicazione continua fra spazi topologici.

Supponiamo che $\forall x \in X$ esista un aperto $V \ni x$ tale che $p^{-1}(V)$ è unione disgiunta di aperti di E :

$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ tali che $\forall i \in I: p|_{U_i}: U_i \rightarrow V$ è un

omeomorfismo. In tal caso p si dice un rivestimento, lo spazio

X si dice base (del rivestimento), lo spazio E si dice spazio totale (del rivestim.), e gli aperti V si dicono aperti banalizzanti

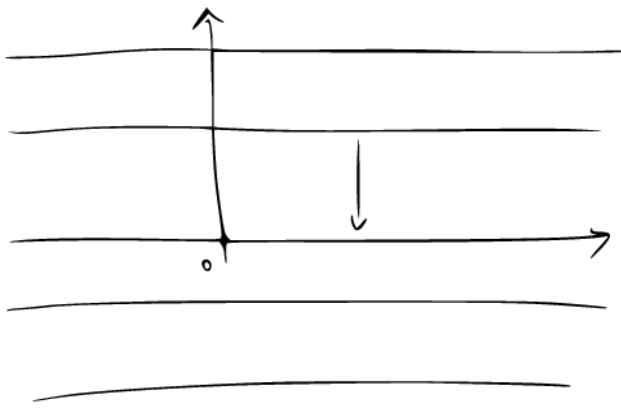
(o aperti ben rivestiti).

Se E e X sono connessi allora p si dice connesso.

Se è possibile prendere $V = X$ allora p si dice banale.

Esempi: 1) Ogni omeomorfismo è un rivestimento banale.

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} = E$ ($\subseteq \mathbb{R}^2$), $X = \mathbb{R}$, $p =$ proiezione sulla 1^a coordinata



p è un rivestimento
banale

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ di prima è un rivestimento non banale

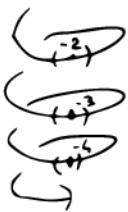
non è banale perché \mathbb{R} non è unione di aperti ciascuno omeomorfo ad S^1 (ad es., perché S^1 è compatto e gli aperti non vuoti di \mathbb{R} non lo sono).

4) Vediamo un omeom. locale che non è un rivestimento.

Sia $g:]-5, 5[\rightarrow S^1$ la restrizione di f di prima.

È facile vedere che è un omeom. locale, ma non è un rivestim.

perché abb. $(1,0) = g(-4) = g(-3) = \dots = g(4)$



$\downarrow g$

dato $\varepsilon > 0$ piccolo, $g|_{]-\varepsilon, \varepsilon[} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V$
"immagine"



è un omeomorfismo, però

$$g^{-1}(V) =]-5, -5+\epsilon[\cup \dots \cup]5-\epsilon, 5[$$

questi due sono omeomorfi a V , ma g non è omeomorfismo da $]-5, -5+\epsilon[$ a V !

questi vanno omeom su V tramite g

Quindi g non è un rivestimento.

Proposizione. Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento.

Se X è connesso, $\forall x, y \in X: |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$.

Dim Sia $x_0 \in X$, scegliamo V aperto bandizzante contenente x_0 , e scegliamo aperti $U_i \subseteq E$ tali che $p|_{U_i}: U_i \rightarrow V$ omeomorfismo, l'indice i varia in un insieme I_{x_0} .

Segue: $|p^{-1}(x_0)| = |I_{x_0}|$, allora tutti i punti di V hanno fibre con la stessa cardinalità.

Possiamo ripetere il ragionam. per ogni punto, e segue che

$A = \{ x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| \}$ è aperto non vuoto in X .

Per lo stesso motivo, anche $X \setminus A$ è aperto. Segue: $A = X$ perché X è connesso.

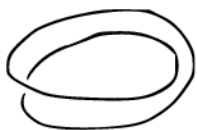
□

Def.: Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento con X connesso. Se $|p^{-1}(x)|$ è finito $\forall x \in X$ (equivalentem. per un $x \in X$) allora poniamo $|p^{-1}(x)| = d$ e si dice che p ha grado d .

Es.: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ di prima non ha grado finito

2) $S^2 \rightarrow S^1$

$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \mapsto (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$ è ben



S^2

definita, la si può vedere anche come



S^1

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

$z \longmapsto z^2$

è un rivestimento di grado 2.

Quozienti per azioni propriamente discontinue

Def.: Sia $G \subseteq \text{Omeo}(E)$ un sottogruppo di $\text{Omeo}(E) = \{f: E \rightarrow E \text{ omeomorfismo}\}$. Si dice che G agisce in modo propriamente discontinuo

se $\forall e \in E \exists U$ intorno aperto di e in E tale che

$$g(U) \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G, \text{ con } g \neq \text{Id}_E.$$

Esempi: 1) $\mathbb{Z} \cong G$ che agisce su $\mathbb{R} = E$ traslando per $m \in \mathbb{Z}$

cioè $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si tratta di un sottogruppo di $\text{Omeo}(\mathbb{R})$
 $x \mapsto x+m$

È un'azione propriam. discontinua, basta prendere per $r \in \mathbb{R}$ l'intorno

$$U =]r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}[.$$

2) Sia $E = \mathbb{R}$ con $G = \{ \text{Id}_{\mathbb{R}}, s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$.
 $x \mapsto -x$

Non è un'azione propriam. discontinua, perché attorno a 0 non esiste alcun aperto U come nella definizione.

Teorema: Sia E spazio topologico, $G \in \text{Omeo}(E)$ che agisce in modo propriam. discontinuo. Il quoziente $p: E \rightarrow E/G$ è un rivestimento.

Dlm.: Sappiamo che p è aperta. Sia $x \in E/G$, consid.

U aperto come nella def. precedente tale che $p(U) \ni x$.

Sappiano: $p(U) = V$ è aperto in X , e

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

Oss.: se $g, h \in G$ sono distinti allora

$$g(U) \cap h(U) = h \left(\underbrace{(h^{-1} \circ g)(U)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Vuoto perché } h \neq g}} \cap U \right) = \emptyset$$

Così i $g(U)$ sono aperti di X , disgiunti due a due, e vale:

$p|_U : U \rightarrow p(U) = V$ è continua, aperta, biettiva, cioè è un omeomorfismo. Allora anche

$p|_{g(U)} : g(U) \rightarrow V$ è un omeomorfismo, perché

$$p|_{g(U)} = p|_U \circ g^{-1}|_{g(U)} \quad (g^{-1}|_{g(U)} : g(U) \rightarrow U)$$

è composizione di omeom.

□

Sezioni

Data $f : X \rightarrow Y$ applicazione qualsiasi, una sezione di f

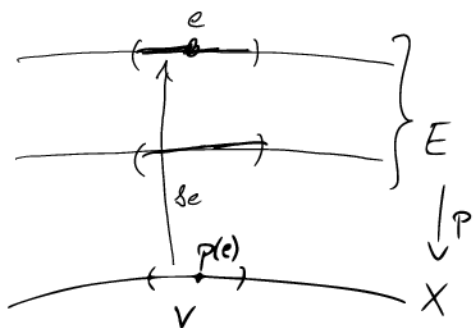
è un'applicazione $s: Y \rightarrow X$ tale che $f \circ s = \text{Id}_Y$.

Oss: In tal caso s è iniettiva.

Es.: Se X e Y sono spazi topologici e f è continua, allora potrebbe non avere sezioni continue. Ad es.

$f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ non ha sezioni continue, perché una sezione sarebbe un'appl. continua $s: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva, e sappiamo che non esiste.

Lemma: Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, e sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante. Dato $e \in p^{-1}(V)$, esiste $s_e: V \rightarrow p^{-1}(V)$ sezione continua di $p|_{p^{-1}(V)}: p^{-1}(V) \rightarrow V$ tale che $s_e(p(e)) = e$.



Dim: Scriviamo $p^{-1}(V)$ come unione di aperti disgiunti come nella def. di rivestimento. Sia U l'aperto fra questi contenente e , allora

$p|_U: U \rightarrow V$ è un omeomorfismo. Basta porre $s_e = (p|_U)^{-1}: V \rightarrow U$

e considerarla come applicazione $V \rightarrow p^{-1}(V)$.

Def.: Una s_e come nel lemma si chiama anche sezione locale di p .

Sollevamento di cammini e di omotopie

Def.: Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, e siano Y uno spazio topologico e $f: Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Un sollevamento di f è un'applicazione continua $g: Y \rightarrow E$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

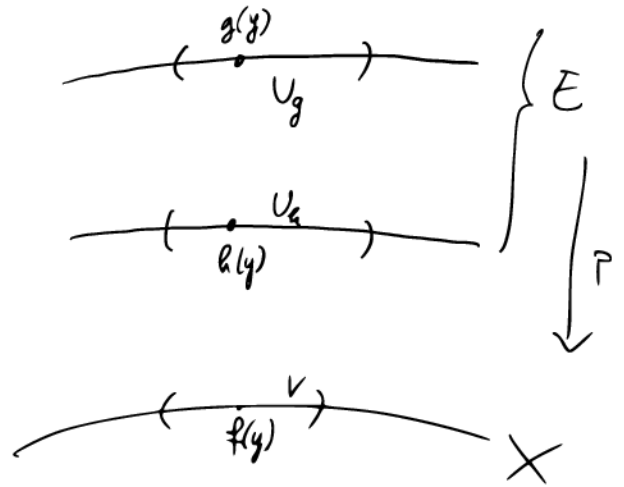
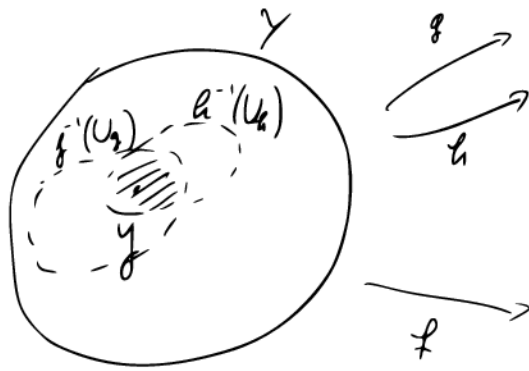
commuta, cioè $f = p \circ g$.

Teorema: Siano $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, Y sp. topologico connesso, e $f: Y \rightarrow X$ continua. Siano g, h sollevamenti di f . Allora $g = h$ oppure $\forall y \in Y: g(y) \neq h(y)$.

Dim.: Consid. $A = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$, dim. che A è aperto e chiuso.

Sia $y \in Y$, prendiamo $V \subseteq X$ aperto banalizzante in X contenente $f(y)$, e prendiamo $U_g, U_h \subseteq E$ aperti della def. di rivestimento tali che $p|_{U_g}: U_g \rightarrow V$ omeom. (lo stesso con U_h), e

$$U_g \ni g(y), \quad U_h \ni h(y):$$



Consid. $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$. E è un intorno aperto di y in Y .

Supponiamo $y \in A$, cioè $g(y) = h(y)$. Allora $U_g = U_h$, e

allora $\forall w \in W$ abb. $g(w)$ e $h(w) \in U_g$. D'altronde

$p(g(w)) = f(w) = p(h(w))$ e p è iniettiva su U_g , quindi $g(w) = h(w)$.

Supponiamo invece che $y \notin A$. Allora U_g e U_h sono disgiunti,

e $\forall w \in W$ abb. $g(w) \in U_g$, $h(w) \in U_h$, quindi $g(w) \neq h(w)$.

Cioè: nel primo caso $W \subseteq A$, nel secondo caso $W \subseteq Y - A$.

Segue: A e $Y - A$ sono entrambi interni di ogni loro punto, cioè

sono aperti. Visto che Y è connesso, allora $A = Y$ cioè $g = h$,

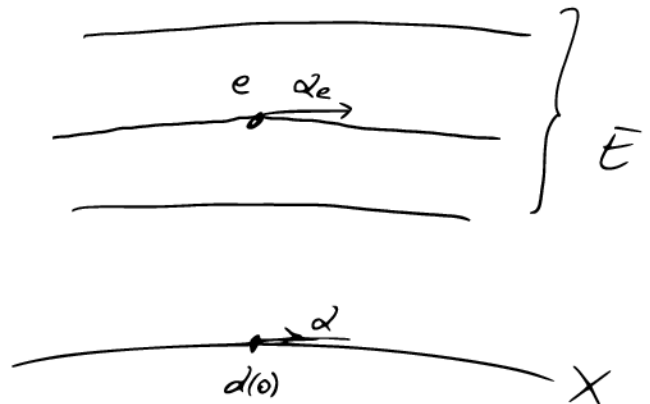
oppure $A = \emptyset$ cioè $g(y) \neq h(y) \forall y \in Y$. \square

Corollario: Sia $E \xrightarrow{p} X$ un'investim. e $f: Y \rightarrow X$ come prima.

Dato $y \in Y$ e $e \in p^{-1}(f(y))$, esiste al più un

sollevamento g di f tale che $g(y) = e$.

Teorema (sollevamento di cammino): Siano $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ continua, sia $e \in E$ tale che $p(e) = \alpha(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\alpha_e: [0, 1] \rightarrow E$ di α tale che $\alpha_e(0) = e$.



Dim.: L'unicit  segue dall'ultimo corollario, dimostriamo che α_e esiste.

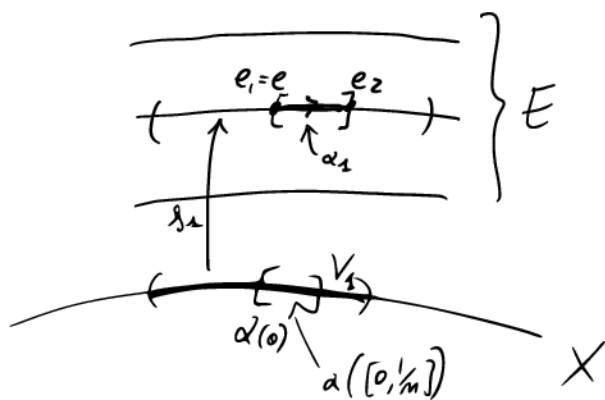
Consid. $\mathcal{R} = \{V \mid V \subseteq X \text{ aperto localmente}\}$,   un ricoprimento aperto di X .

Per il Corollario al Teo. del numero di Lebesgue esiste $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e aperti $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$\alpha\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right) \subseteq V_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Sia $s_1: V_1 \rightarrow p^{-1}(V_1)$ sezione locale di p tale che $s_1(\alpha(0)) = e$, e definiamo

$$\alpha_1: [0, \frac{1}{m}] \rightarrow E \quad \text{come} \quad \alpha_1 = \beta_1 \circ \alpha$$



Poniamo anche $e_1 = e$, $e_2 = \alpha_1(\frac{1}{m})$.

Continuiamo con $\alpha_2: [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \rightarrow E$ che solleva $\alpha|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}$

partendo da e_2 , cioè scegliamo $\beta_2: V_2 \rightarrow p^{-1}(V_2)$ sezione locale

e poniamo $\alpha_2 = \beta_2 \circ \alpha$.

Proseguiamo fino ad $\alpha_m: [\frac{m-1}{m}, 1] \rightarrow E$ che solleva

$\alpha|_{[\frac{m-1}{m}, 1]}$.

Definiamo $\alpha_e: [0, 1] \rightarrow E$

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{m}] \\ \alpha_2(t) & \text{per } t \in [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \\ \vdots & \\ \alpha_m(t) & \text{per } t \in [\frac{m-1}{m}, 1] \end{cases}$$

Otteniamo un cammino, cioè d_e è continua, e per costruzione

$$d_e(0) = e \quad \text{e anche} \quad p(d_e(t)) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

□

Esempio: Consid. $d: [0, 1] \rightarrow S^1$
 $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

e il solito rivestimento $\mathbb{R} \xrightarrow{f} S^1$. Allora scegliamo
in $e \in \mathbb{R}$ tale che $f(e) = (1, 0) = d(0)$. Ad es. $e = 0$.

Allora $d_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto t$

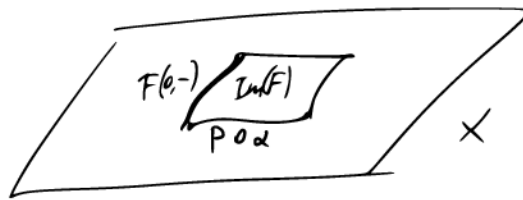
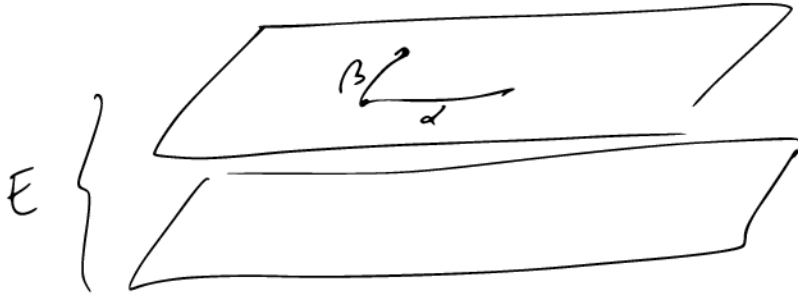
Preso invece $\beta: [0, 1] \rightarrow S^1$ con $\beta(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$,

il sollevamento con lo stesso $e = 0$ è $\beta_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto 2t$

Teorema (Sollevamento dell'omotopia di cammini) Siano $p: E \rightarrow X$ un
rivestimento, $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua,
sia $\alpha: [0, 1] \rightarrow E$ continua tale che $p(\alpha(t)) = F(t, 0)$
 $\forall t \in [0, 1]$. Allora esiste un unico sollevamento G di F
tale che $G(t, 0) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0, 1]$.

Dim.: L'unicità è già nota, dimostriamo l'esistenza di G .

Def. $\beta: [0,1] \rightarrow E$ sollevam. di $s \mapsto F(0,s)$ tale che $\beta(0) = \alpha(0)$.



Incollando α e β ottengo un'applicazione g da $L = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ in E .

Dimostriamo che esiste un sollevam. G di F coincidente con g su L .

Due casi:

1) Supponiamo $F([0,1] \times [0,1])$ contenuta in un aperto banalizzante V . Visto che L è connesso, esiste un unico aperto U della def. di rivestimento, tale che $g(L) \subseteq U$.

Sia $s: V \rightarrow U$ la sezione locale, e basta definire

$$G = s \circ F.$$

2) Supponiamo che $F([0,1] \times [0,1])$ non sia contenuta in un aperto banalizzante.

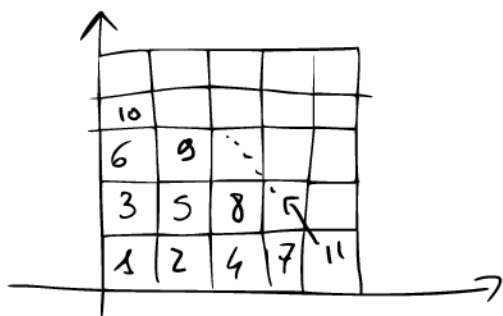
Per il teorema del numero di Lebesgue (lasciamo i dettagli per esercizio) possiamo suddividere $[0,1] \times [0,1]$ nei quadrati

$$Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right]$$

con m tale che $F(Q_{ij})$ è contenuto in un aperto

banalizzante $V_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Solleveremo $F|_{Q_{ij}}$ nel modo seguente: ordiniamo $(\mathbb{Z}_{>0})^2$ così:



$$(i, j) \leq (h, k) \Leftrightarrow i+j < h+k$$

oppure

$$i+j = h+k$$

$$\text{e } j \leq k.$$

Per ogni Q_{ij} sollevo $F|_{Q_{ij}}$ usando il caso 1),

e questo definisce ricorsivamente il sollevamento

$$G_{(h,k)} : L \cup \bigcup_{(i,j) \leq (h,k)} Q_{ij} \longrightarrow E$$

Abb.: $G_{(m,m)} = G$ è il sollevamento voluto di F . \square

Teorema: Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, $e \in E$ tale che $p(e) = a$. Siano α_e, β_e sollevamenti di α e β rispettivamente, tali che $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$. Allora sono equivalenti:

- 1) $\alpha \sim \beta$ (ric: \sim = omotopia di cammini)
- 2) $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e $\alpha_e \sim \beta_e$.

Dim.: 2) \Rightarrow 1) è semplice: se $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e $\alpha_e \sim \beta_e$ tramite un'omotopia $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$, allora $\alpha \sim \beta$ tramite $p \circ F$ che è un'omotopia.

1) \Rightarrow 2) } Supponiamo $\alpha \sim \beta$ e sia $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ un'omotopia di cammini da α a β .

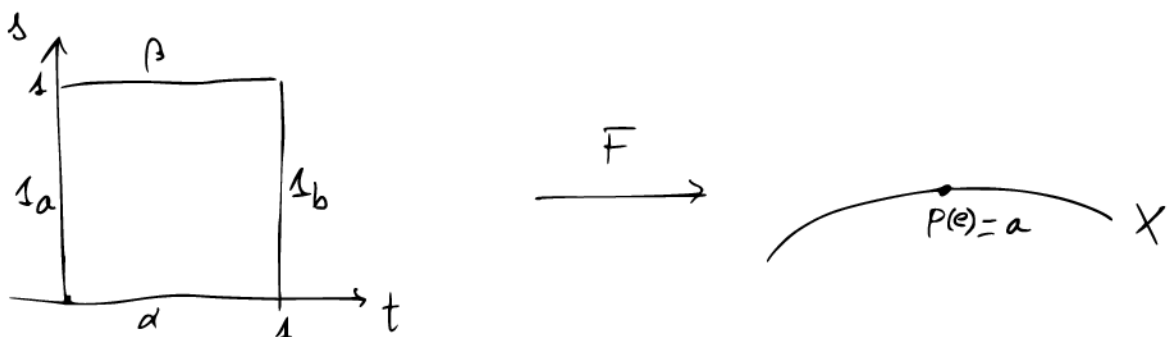
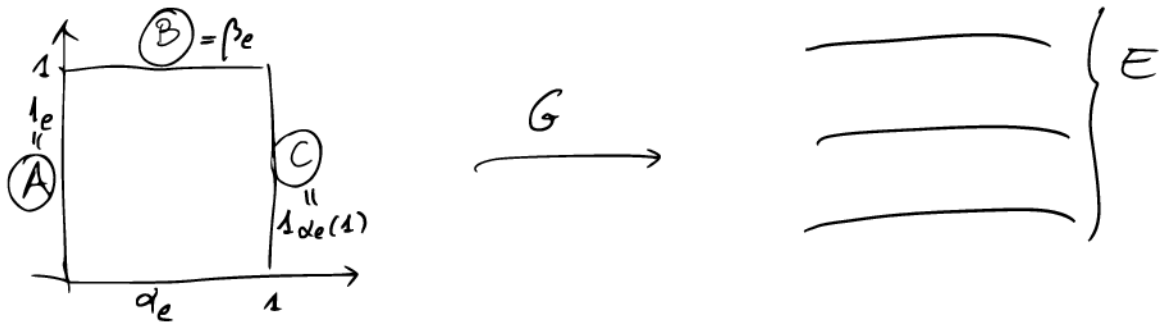


Abb. già sollevato α ad $\alpha_e: [0,1] \rightarrow E$. Per il teorema del sollevam. dell'omotopia, esiste $G: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$ che solleva F e tale che $G(-, 0) = \alpha_e(-)$.



Ⓐ: $G(0, -)$ è un sollevamento di $F(0, -)$, quindi è un sollevamento del cammino costante 1_a , sollevam. che parte da $e \in E$. Anche il cammino costante 1_e in E è un sollevam. con le stesse proprietà, e per l'unicità del sollevam. dei cammini abb. $G(0, -) = 1_e$.

Ⓑ: $G(-, 1)$ è un sollevam. di $F(-, 1) = \beta$, e questo sollevamento parte da $G(0, 1) = e$. Anche β_e è un sollevam. che parte da e , quindi $G(-, 1) = \beta_e$.

Ⓒ: $G(1, -)$ è sollevam. di $F(1, -) = 1_b$ e parte dal punto finale di α_e , cioè $\alpha_e(1)$. Anche $1_{\alpha_e(1)}$ solleva 1_b partendo da $\alpha_e(1)$, quindi $G(1, -) = 1_{\alpha_e(1)}$.

Da Ⓑ e Ⓒ segue che $\beta_e(1) = \alpha_e(1)$.

Da \textcircled{A} e \textcircled{C} segue che G è omotopia di cammini da α_e a β_e ,
quindi $\alpha_e \sim \beta_e$. □

Corollario: $\pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$. Più precisamente, definiamo

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, (1,0)) \\ n &\longmapsto [\alpha^{(n)}] \end{aligned}$$

dove $\alpha^{(n)}(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$

cioè $\alpha^{(n)}$ "gira" intorno alla circonferenza $|n|$ volte, in senso antiorario se $n > 0$ e orario se $n < 0$.

Allora φ è un isomorfismo di gruppi.

Dim.: Dim che φ è iniettivo e suriettivo.

Iniettività: sia $n \in \ker(\varphi)$, cioè tale che $\alpha^{(n)} \sim 1_{(1,0)}$.

Usiamo il solito rivestimento $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, e solleviamo $\alpha^{(n)}$

a $(\alpha^{(n)})_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. D'altronde noi sappiamo dare

esplicitam. un sollevamento di $\alpha^{(n)}$ che parte da 0, e cioè

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto nt$$

quindi questo è $(\alpha^{(n)})_0$.

Dal teorema: $(\alpha^{(n)})_0(0) = (\alpha^{(n)})_0(1)$ e allora $n=0$.

Suriettività: Sia $\alpha \in \Omega(S^1, (1,0), (1,0))$ e dim. che $\alpha \sim \alpha_n$

per qualche n . Solleviamo α ad un cammino α_0 che parte da $0 \in \mathbb{R}$. Visto che α è un cammino chiuso, $\alpha_0(1)$ è tale che $f(\alpha_0(1)) = (1, 0)$, cioè $\alpha_0(1) \in \mathbb{Z}$. Poniamo $\alpha_0(1) = n$, e consid. $\alpha^{(n)} \in \Omega(S^1, (1, 0), (1, 0))$.

Il sollevam. $(\alpha^{(n)})_0$ di $\alpha^{(n)}$ partendo da 0 ha gli stessi punti iniziale e finale di α_0 . Visto che \mathbb{R} è convesso, abb. $\alpha_0 \sim (\alpha^{(n)})_0$. Per il teorema abb. $\alpha \sim \alpha^{(n)}$.

Rimane da dim. che φ è un omomorfismo di gruppi, cioè che $\varphi(m+n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. Siano allora $m, n \in \mathbb{Z}$,
operaz. in $\pi_1(S^1)$

abb. $\varphi(m+n) = [\alpha^{(m+n)}]$, e $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = [\alpha^{(m)} * \alpha^{(n)}]$.

Usiamo il teorema per dim. che $\alpha^{(m+n)}$ e $\alpha^{(m)} * \alpha^{(n)}$ sono equival., quindi solleviamo $\alpha^{(m+n)}$ al cammino $\beta = (\alpha^{(m+n)})_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ da
 $t \mapsto (m+n)t$

$0 \in \mathbb{R}$ a $m+n \in \mathbb{R}$. Solleviamo $\alpha^{(m)}$ al cammino $\gamma = \alpha_0^{(m)}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ da 0 a m , e solleviamo $\alpha^{(n)}$ al
 $t \mapsto nt$

cammino $\delta = (\alpha^{(n)})_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ da \underline{m} a $m+n$. Oss.: esiste
 $t \mapsto m + nt$

la giunzione $\gamma * \delta$, cammino da 0 a $m+n$, e $\gamma * \delta$

solleva $\alpha^{(m)} * \alpha^{(m)}$ (verifica immediata). Ora β e $\gamma * \delta$ sono entrambi cammini in \mathbb{R} da 0 al punto $m+m$, e sono equivalenti perché \mathbb{R} è convesso. Dal teorema deduciamo $\alpha^{(m+m)} \sim \alpha^{(m)} * \alpha^{(m)}$, da cui φ è un omomorfismo. \square

Teoremi di Borsuk e Brouwer

Esercizio: Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento, sia $f: S^2 \rightarrow X$ continua, sia $y \in S^2$ e $e \in E$ tale che $f(y) = p(e)$.

Dimostrare che esiste un unico sollevamento $g: S^2 \rightarrow E$ di f tale che $g(y) = e$.

(Suggerimento: usare il sollevam. dell'omotopia di cammini, esprimendo S^2 "in termini" del quadrato $[0,1] \times [0,1]$).

Teorema (Borsuk): Non esistono appl. continue $f: S^2 \rightarrow S^1$ tali che $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2$.

Dim.: Sia $f: S^2 \rightarrow S^1$ continua, consid. $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ il solito rivestimento. Per l'esercizio, f si solleva a $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sappiamo già che esiste $x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = g(-x_0)$,

e allora $f(x_0) = f(-x_0)$. Segue: $f(-x_0) \neq -f(x_0)$
 (altrimenti avrei $f(x_0) = (0,0) \notin S^1$). \square

Corollario: Ogni appl. continua $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ammette un punto $x \in S^2$
 tale che $g(x) = g(-x)$.

Dim.: Se per assurdo $g(x) \neq g(-x) \forall x \in S^2$ allora è ben def.

e continua l'applicazione $f: S^2 \rightarrow S^1$

$$x \mapsto \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$$

Questa f soddisfa $f(-x) = -f(x)$, contraddicendo il teorema di
 Borsuk. \square

Corollario: Sia $m \geq 3$ e $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto non vuoto. Data
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua, f non è iniettiva. In particolare
 nessun aperto di \mathbb{R}^m è omeomorfo a \mathbb{R}^2 , e \mathbb{R}^m stesso non è omeom.
 a \mathbb{R}^2 .

Dim.: Sia $a \in A$, allora esiste $Y \subseteq A$ tale che Y è
 omeomorfo a S^2 (basta prendere un S^{m-1} dentro $B(a, \epsilon) \subseteq A$
 e intersecarlo con un sottosp. affine di dim. 3 contenente a).

Allora la restrizione $f|_Y: Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ non è iniettiva per il corollario
 precedente. \square

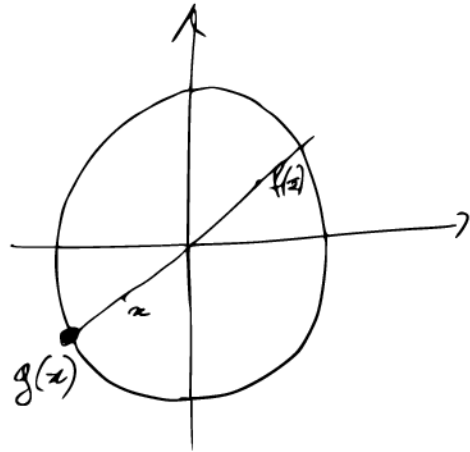
Corollario (di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$): S^1 non è un retracts di $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Dim.: Ricordiamo: se avessimo $r: D^2 \rightarrow S^1$ retraction, allora $i_x: \pi_1(S^1, (1,0)) \rightarrow \pi_1(D^2, (1,0))$ sarebbe iniettiva, dove $i: S^1 \rightarrow D^2$ è l'inclusione.

Visto che $\pi_1(S^1, (1,0))$ non è banale ma $\pi_1(D^2, (1,0))$ lo è (D^2 è convesso), questo è un assurdo. \square

Teorema (punto fisso di Brouwer): Ogni applicaz. continua $f: D^2 \rightarrow D^2$ ammette un punto fisso.

Dim.: Se per assurdo $x \neq f(x) \forall x \in D^2$, allora si può prendere il punto $g(x)$ di intersezione fra S^1 e la retta



che contiene x e $f(x)$, quello "della parte" di x . (Esercizio: scrivere un'espressione esplicita di $g(x)$ e verificare che g è continua.)

Se $x \in S^1$ allora $g(x) = x$ per costruzione, cioè g sarebbe una retractione di D^2 su S^1 , assurdo. \square

Fibre di rivestimenti e gruppi fondamentali

Teorema: Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento, siano $e \in E$ e $x = p(e)$.

$$1) p_*: \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

\bar{e} è iniettiva, e l'immagine $p_*(\pi_1(E, e))$ è fatta dagli elem. $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ tali che il sollevamento α_e è un cammino chiuso.

2) Supp. E connesso per archi. Allora c'è una biiezione

fra $p^{-1}(x)$ e $\frac{\pi_1(X, x)}{p_*(\pi_1(E, e))}$ (l'insieme delle

classi laterali destre), data associando alla classe di $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ il punto finale del sollevam. α_e .

Dim: 1) Sappiamo che p_* è omomorfismo di gruppi, sia

$[\alpha] \in \pi_1(E, e)$ tale che $p_*([\alpha])$ sia banale, cioè

$p \circ \alpha \sim 1_x$. D'altronde α solleva $p \circ \alpha$ partendo da e , e 1_e solleva 1_x partendo da e . Da un teorema precedente abb. $\alpha \sim 1_e$, cioè $[\alpha]$ banale. Segue: p_* iniettiva.

Dimostriamo l'uguaglianza fra gli insiemi:

⊆] Sia $[\alpha] \in P_*(\pi_1(E, e))$ cioè esiste $\beta \in \pi_1(E, e)$

tale che $[\alpha] = [p_0 \beta]$. Il cammino β solleva $p_0 \beta$ e finisce in $\beta(1) = e$, allora anche il sollevam. α_e di α finisce in e .

⊇] Sia $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ tale che $\alpha_e(1) = e$, allora $\alpha_e \in \Omega(E, e, e)$ e $[\alpha] = [p_0 \alpha_e] = P_*([\alpha_e])$ quindi $[\alpha] \in P_*(\pi_1(E, e))$.

2) L'applicaz. è $P_*(\pi_1(E, e)) [\alpha] \xrightarrow{\varphi} \alpha_e(1)$.

a) E' ben definita: dato $[\gamma] \in P_*(\pi_1(E, e))$, abb. $[\gamma] \cdot [\alpha] = [\gamma * \alpha]$. Il sollevam. γ_e è chiuso (per la prima parte della dim.), quindi $\gamma_e * \alpha_e$ è definito, solleva $\gamma * \alpha$ partendo da e , e finisce in $\alpha_e(1)$, quindi φ è ben definita.

b) E' iniettiva: siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$ tali che $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$. Allora $\alpha_e * i(\beta_e)$ è definito e finisce in e , cioè è chiuso. Solleva $\alpha * i(\beta)$, quindi $[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = [\alpha * i(\beta)] = [p_0(\alpha_e * i(\beta_e))] = P_*([\alpha_e * i(\beta_e)])$ è in $P_*(\pi_1(E, e))$, cioè $[\alpha]$ e $[\beta]$ sono nella stessa classe lat. destra.

c) E' suriettiva: sia $e' \in \varphi^{-1}(x)$, scegliamo $\gamma \in \Omega(E, e, e')$, allora $\varphi \circ \gamma = \alpha$ è un cammino chiuso in X , il cui sollevamento α_e è γ e finisce in e' . Quindi φ manda la classe (cl. destra di $[\alpha]$ in e' , allora φ è suriettiva. \square

Corollario: $\pi_2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m, x) \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \quad \forall m \geq 2.$

Dim.: Abb. visto il rivestimento $\varphi: S^m \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$, e sappiamo che $|\varphi^{-1}(x)| = 2$ per ogni $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$ (v. esercizi settimanali).

Visto che $m \geq 2$, sappiamo che $\pi_2(S^m, e)$ è banale, e dal teorema (parte 2)) deduciamo $|\pi_2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m, x)| = 2.$

A meno di isomorfismo c'è un solo gruppo con due elementi, ed è $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$ \square

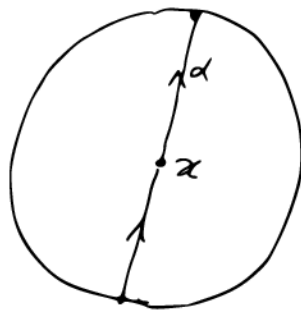
Oss.: Pensando a $S^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, immaginiamo perché $\pi_2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, x) \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$



Se α è come in figura da e a $-e$, allora ovviamente $\varphi \circ \alpha$ non è omotopo al cammino costante.

Però posso fare la giunzione di α con il "cammino antipodale",
 e ottengo un cammino chiuso in S^2 la cui immagine in \mathbb{P}^2
 è lo stesso cammino di pod percorso due volte. In S^2 α è
 omotopo al cammino banale, quindi $2[\text{pod}] = [1z]$.

Si può vedere la cosa anche considerando solo \mathbb{P}^2 ,
 vedendo \mathbb{P}^2 come $\overset{\text{disco chiuso}}{\mathbb{D}^2} / \sim$ dove \sim identifica x e $-x$
 per $x \in S_1 \subset \mathbb{D}^2 \cong \mathbb{R}^2$



percorrendo α due volte ho:

